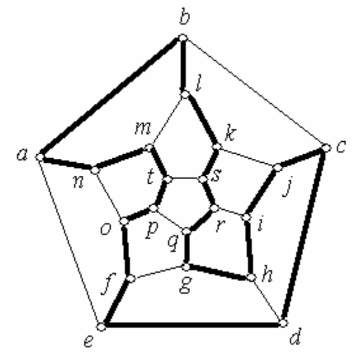
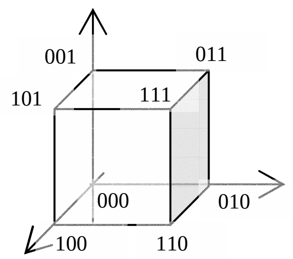
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

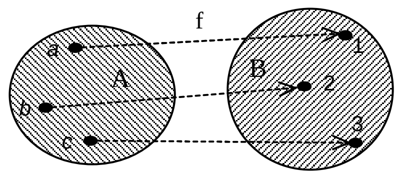
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник для студентів
економічних і менеджерських спеціальностей





ХАРКІВ – ХНАМГ – 2008

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

**А.І. Колосов, Л.Б. Коваленко,
С.О. Станішевський, А.В. Якунін, Є.С. Пахомова**

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник для студентів
економічних і менеджерських спеціальностей

Харків – ХНАМГ – 2008

УДК 519.1+519.6

А.І. Колосов, Л.Б. Коваленко, С.О. Станішевський,
А.В. Якунін, Є.С. Пахомова

Елементи дискретної математики: Навчальний посібник для студентів економічних і менеджерських спеціальностей. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 74 с.

Посібник побудований за модульною технологією і призначений для самостійного вивчення дисципліни студентами заочної та дистанційної форм навчання. У посібнику викладено основи теорії множин і відношень, числення висловлень і логіки, теорії графів і комбінаторики.

Кожен розділ складається з коротких теоретичних відомостей і прикладів розв'язання типових задач. У додатку наведено завдання до модульної контрольної роботи.

Навчальний посібник буде корисний студентам інших спеціальностей для ознайомлення з методами дискретної математики та їх практичного використання із залученням комп'ютерної техніки.

Іл. - 30, табл. - 2, бібліогр. - 9 назв.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. М.Й. Кадець

Рекомендовано Вченою радою Харківської національної академії міського господарства як навчальний посібник, протокол № 10 від 30.05.2008 р.

ПЕРЕДМОВА

Для багатьох економічних та інших систем характерна дискретність їх функціонування у просторі й часі. Основу сучасних технологій становить комп'ютерна техніка, де подання інформації та її обробка є дискретними. Дискретні уявлення потребують обґрунтування і спеціальних методів кількісного аналізу, для чого залучається апарат дискретної математики. На відміну від класичної, у дискретній математиці відсутні поняття граничного переходу й неперервності. Основним об'єктом дискретної математики служить множина, а структуру дискретної моделі формують відношення між її елементами.

Посібник призначений для ознайомлення з основами дискретної математики як інструментарію для розв'язування реальних задач засобами комп'ютерної техніки, а також має сприяти розвиткові логічного та алгоритмічного мислення.

Теоретичний матеріал ілюструється прикладами розв'язання типових задач, що розраховані на самостійне опрацювання. Ефективне вивчення розглянутих понять і методів потребує напруженої самостійної роботи. Студентам рекомендується вести робочий зошит для опрацювання поданого теоретичного і практичного матеріалу, доповнюючи його інформацією, почерпнутою з інших джерел.

У список літератури включено джерела для первинного вивчення дискретної математики і книги для бажаючих більш повно і глибоко засвоїти окремі розділи та їх застосування.

У додатку наведено завдання до модульної контрольної роботи.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини є первісним, йому не можна дати строгого означення.

Множиною є сукупність об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю, що розглядаються як єдине ціле.

Визначення 1.1. Якщо a - один з об'єктів множини A, то говорять, що a - ***елемент*** множини A або a ***належить*** A.

Домовимося позначати множини великими латинськими літерами $A, B, C,...$, а елементи множини – малими латинськими літерами $a, b, c,...$

Визначення 1.2. Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається ***скінченною***, у протилежному разі – ***нескінченною***. Кількість елементів у скінченній множині A називається її ***потужністю*** і позначається $|A|$.

Способи задання множин:

- ***перерахуванням,*** тобто списком усіх своїх елементів. Такий спосіб прийнятний тільки при заданні скінченних множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина A, що складається з перших п'яти простих чисел: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Множина B спортсменів університетської хокейної команди:

$$B = \{Іванов, Петров, Сидоров, Бубликов, Сироєжкін, Волосюк\};$$

- ***процедурою,*** що породжує й описує спосіб одержання елементів множини з уже отриманих елементів або з інших об'єктів. Наприклад, множина усіх додатних цілих чисел, що є степенями двійки $M_{2^n}, n \in N$, де N - множина натуральних чисел, може бути представлена породжуючою процедурою, заданою двома рекурсивними правилами: а) $1 \in M_{2^n}$; б) якщо $m \in M_{2^n}$, тоді $2m \in M_{2^n}$;

- ***описом характеристичної властивості***, яку повинні мати елементи даної множини і тільки вони. Множина A, що складається з усіх елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначається так: $A=\{x|P(x)\}$.

Зокрема, розглянута вище множина M_{2^n} всіх додатних цілих чисел, що є степенями двійки, може бути записана як $M_{2^n}=\{x \mid x=1 \ \textit{або} \ x=2^n, n\in N\}$.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a\in A$. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a\notin A$. Наприклад, $5\in\{1,3,5,7\}$, але $4\notin\{1,3,5,7\}$. Якщо $A=\{x|\textit{студентки групи } MM_{21}\}$, то $\textit{Іванова}\in A$, а $\textit{Петров}\notin A$.

<u>Визначення 1.3</u>. Множина A називається ***підмножиною*** (***включенням***) множини B $(A\subseteq B)$, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x\in A$, то $x\in B$.

Якщо $A\subseteq B$ й $A\neq B$, то A називається ***строгою підмножиною*** і позначається $A\subset B$.

<u>Визначення 1.4</u>. Дві множини ***рівні*** $(A=B)$, якщо всі їхні елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A\subseteq B$ і $B\subseteq A$.

<u>Визначення 1.5</u>. Множина, що не містить елементів, називається ***порожньою*** і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. ***Універсальна множина*** U – це така множина, що всі розглянуті множини служать її підмножинами.

Слід розрізняти поняття належності елементів множині та включення! Наприклад, якщо множина $A=\{1,3,6,13\}$, то $3\in A$, $6\in A$, але $\{3,6\}\notin A$, у той час як $\{3,6\}\subseteq A$.

<u>Приклад 1.1</u>. Які з наведених визначень множин A, B, C, D є коректними (правильними):

а) $A=\{1,3,5\}$, б) $B=\{4,7,7,11\}$, в) $C=\{x|x\in A\}$, г) $D=\{A,B\}$?

Чи належить число 5 множині D?

Розв'язання.

а) Визначення множини A перерахуванням елементів коректне.

б) Елементи множини повинні бути різні, тому при перерахуванні елементів множини не треба вказувати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини B виглядає так: $B=\{4, 7, 11\}$.

в) Визначення множини C описом характеристичної властивості коректне.

г) Визначення списком множини D коректне: елементами множини D є множини A і B, $D=\{\{1,3,5\},11\}$. Однак $6\notin D$, тому що даний елемент не перерахований у списку.

<u>Визначення 1.6</u>. Множина всіх підмножин множини A називається ***булеаном*** $P(A)$. Потужність булеана $|P(A)| = 2^{|A|}$.

<u>Приклад 1.2</u>. Нехай $A=\{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання.

$$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\},$$
$$\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}; \quad |A|=4; \quad |P(A)| = 2^4 = 16.$$

1.2. Операції над множинами

<u>Визначення 1.7</u>. ***Об'єднанням*** множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній з множин A або B. Об'єднання множин A і B позначається $A\cup B$. Це визначення рівносильне наступному: $A\cup B=\{x | x\in A\in \textit{або } x\in B\}$.

<u>Приклад 1.3</u>. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A\cup B$.

Розв'язання. $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

<u>Визначення 1.8</u>. ***Перетином*** множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать і множині A й множині B. Перетин множин A і B позначається $A\cap B$. Це визначення рівносильне наступному: $A\cap B=\{x | x\in A \; i \; x\in B\}$.

<u>Приклад 1.4</u>. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A\cap B$.

Розв'язання. $A\cap B=\{2, 3, 7\}$.

Визначення 1.9. ***Різницею*** множин A і B (***відносним доповненням***) називається множина, що складається з усіх елементів множини A, яких немає у B. Різницю множин A і B позначають $A-B$. Це визначення рівносильне наступному: $A-B=\{x|x\in A\ \ i\ \ x\notin B\}$.

Приклад 1.5. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A-B$.

Розв'язання. $A-B=\{5, 6\}$.

Визначення 1.10. ***Доповненням*** (***абсолютним доповненням***) множини A називається множина, що складається з усіх елементів універсальної множини U, які не належать A. Доповнення множини A позначається $\overline{A}$. Це визначення рівносильне наступному: $\overline{A}=U-A=\{x|x\in U\ \ i\ \ x\notin A\}$.

Визначення 1.11. ***Симетричною різницею*** (***кільцевою сумою***) множин A і B називається множина, що є об'єднанням усіх елементів, які належать множині A і не містяться у B, та елементів, які належать множині B і не містяться в A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A+B$. Це визначення рівносильне наступному: $A+B=(A-B)\cup(B-A)$.

Визначення 1.12. Операції, які виконують над однією множиною, називають ***унарними***. Операції, які виконують над двома множинами, називають ***бінарними***.

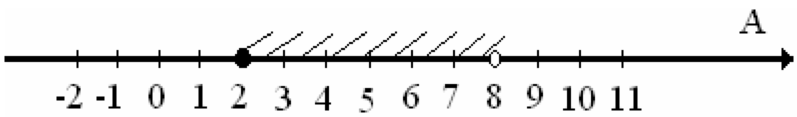
Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця.

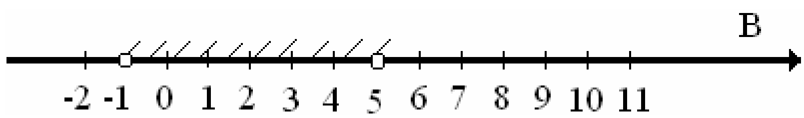
Приклад 1.6. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A+B$.

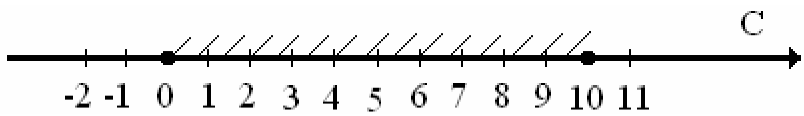
Розв'язання. $A+B=\{1, 5, 6, 9\}$.

Приклад 1.7. Нехай $A=[2, 8)$, $B=(-1, 5)$; $C=[0, 10]$. Знайти $A\cup B$, $B\cap C$, $C-A$, $B+C$, $\overline{B}$.

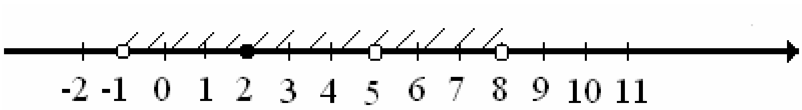
Розв'язання. Зобразимо задані множини на числовій осі



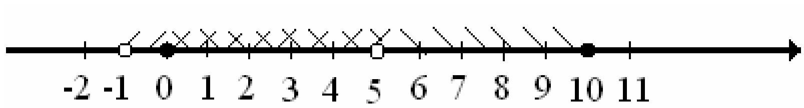




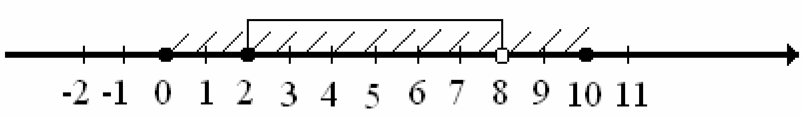
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



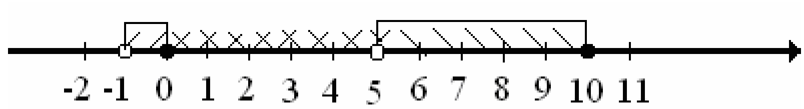
$$A \cup B = (-1, 8);$$



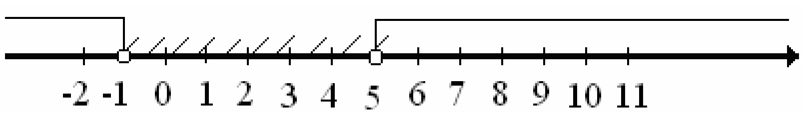
$$B \cap C = [0, 5);$$



$$C - A = [0, 2) \cup [8, 10];$$



$$B + C = (-1, 0) \cup [5, 10];$$

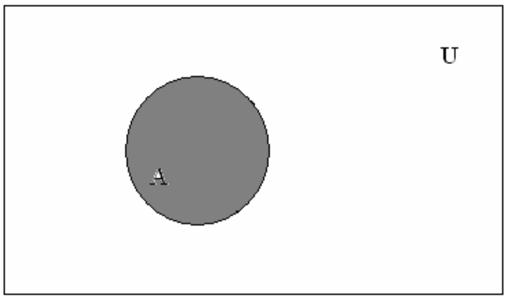


$$\overline{B} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

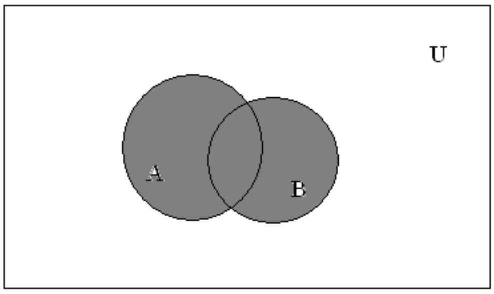
Рис. 1.1.

1.3. Діаграми Венна

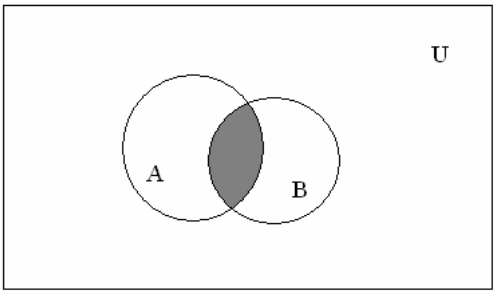
Для графічної ілюстрації відношень між множинами даної універсальної множини U використовують діаграми Венна. Діаграма Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини – плоскої області, наприклад, круга. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника, що охоплює всі такі області. На рис. 1.2 зображені діаграми Венна для розглянутих операцій над множинами.



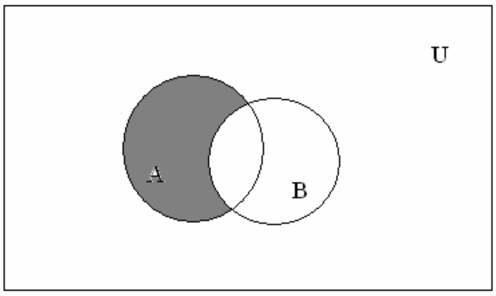
A



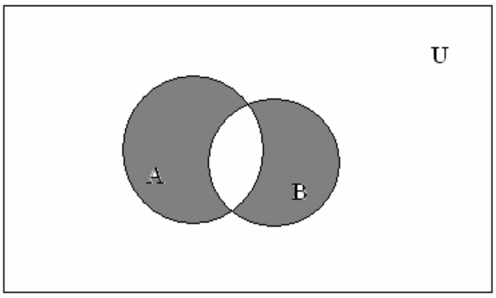
$A \cup B$



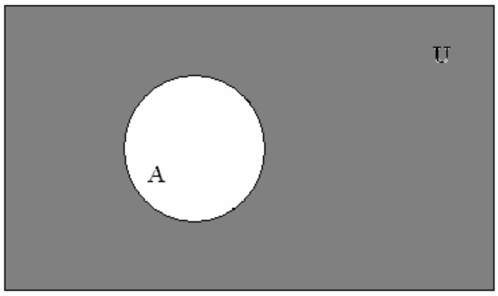
$A \cap B$



$A - B$



$A + B$



$\overline{A}$

Рис. 1.2.

Теорема 1. Для будь-яких підмножин A, B, C універсальної множини U справедливе наступне:

а) закони ідемпотентності $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

б) подвійне доповнення $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$;

в) закони де Моргана $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) властивості комутативності $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

д) властивості асоціативності

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

е) властивості дистрибутивності

$$A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C); \qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C);$$

ж) властивості тотожності $\quad A\cup\varnothing = A; \qquad A\cap U = A;$

з) властивості доповнення $\quad A\cup\overline{A} = U; \qquad A\cap\overline{A} = \varnothing.$

Пріоритет операцій: 1. $\overline{A}$; 2. $A\cap B$; 3. $A\cup B$; 4. $A-B$; 5. $A+B$.

Операції одного рівня виконуються зліва направо.

Приклад 1.7. Покажіть, що $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

Розв'язання. Доведемо цю властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Венна (рис. 1.3):

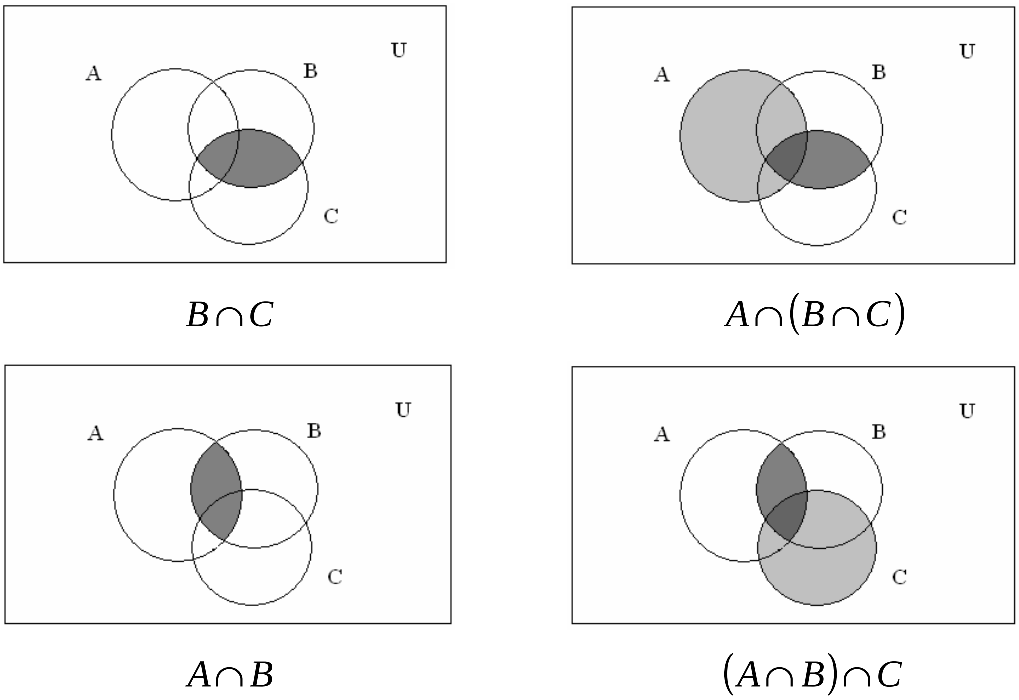


Рис. 1.3.

Як бачимо з рис. 1.3 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, що й треба було довести.

2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні поняття

Визначення 2.1. ***Упорядкована пара*** – це сукупність, що складається з двох предметів, розташованих у певному порядку. При цьому впорядкована пара має такі властивості:

а) для будь-яких двох предметів x і y існує об'єкт, який можна позначити як $\langle x, y\rangle$, названий упорядкованою парою;

б) якщо $\langle x, y\rangle$ і $\langle u, v\rangle$ - упорядковані пари, то $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ тоді й тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

При цьому x будемо називати ***першою координатою***, а y - ***другою координатою*** впорядкованої пари $\langle x, y\rangle$.

<u>Визначення 2.2</u>. ***Бінарним*** (***двомісним***) відношенням R називається підмножина впорядкованих пар, тобто множина, кожен елемент якої є впорядкована пара.

Якщо R є деяке відношення, це записують як $\langle x, y\rangle \in R$ або xRy.

Областю визначення $D(R)$ відношення R називається множина перших координат x його впорядкованих пар $\langle x, y\rangle$: $D(R) = \{x | \langle x, y\rangle \in R\}$, а ***областю значень*** $E(R)$ –множина других координат y його впорядкованих пар $\langle x, y\rangle$: $E(R) = \{y | \langle x, y\rangle \in R\}$ (рис. 2.1).

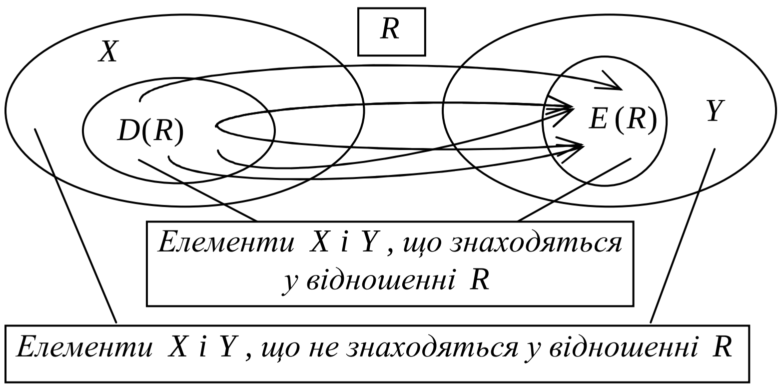


Рис. 2.1

<u>Приклад 2.1</u>. Знайти області визначення і значень відношення

$$A = \{\langle a,1\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle, \langle c,5\rangle, \langle e,7\rangle\}.$$

Розв'язання. Область визначення заданого відношення $D(A) = \{a, c, e\}$, а область значень - $E(A) = \{1,2,5,7\}$.

<u>Визначення 2.3</u>. Відношення R^{-1} називається ***оберненим*** до даного відно-

шення R, якщо $aR^{-1}b$ тоді й тільки тоді, коли bRa.

Наприклад, оберненими до $R_1 : a \geq b$ і $R_2 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ є відповідно відношення $R_1^{-1} : a \leq b$ і $R_2^{-1} = R_2$.

З означення випливає $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Один з типів відношень − це множина всіх таких пар $\langle x, y \rangle$, що x є елемент деякої фіксованої множини X, а y − елемент деякої фіксованої множини Y. Таке відношення називається ***прямим*** (***декартовим***) добутком.

Визначення 2.4. ***Декартовий добуток*** $X \times Y$ множин X і Y є множина $\{\langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y\}$.

Скориставшись означенням декартового добутку, можемо дати ще одне визначення бінарного відношення:

Визначення 2.5. ***Бінарним*** відношенням R називається підмножина пар $\langle x, y \rangle \in R$ прямого добутку $X \times Y$, тобто $R \subseteq X \times Y$.

Далі розглядатимемо тільки бінарні відношення, тому для скорочення термін "бінарний" будемо опускати.

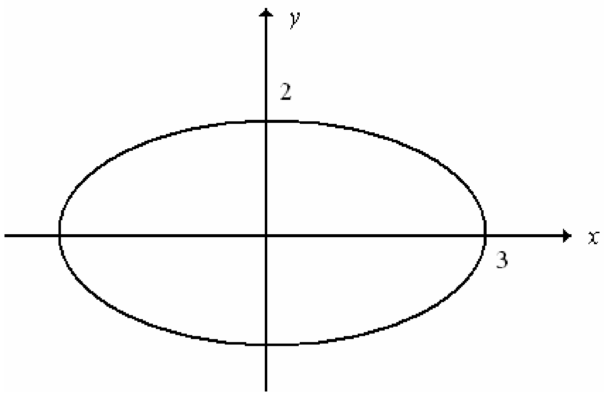


Рис. 2.2.

Наведемо кілька прикладів відношень:

1. Якщо R − множина дійсних чисел, то $\left\{\langle x, y \rangle \in R \,\middle|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$ - бінарне відношення на R. Графічно це відношення зображене на рис. 2.2.

2. Якщо N − множина натуральних чисел, то відношення $\{\langle x, y \rangle \in N \times N \mid x \geq y\}$ виконується для пар $\langle 5,3 \rangle$, $\langle 7,1 \rangle$, $\langle 2,2 \rangle$, але не виконується для пар $\langle 1,7 \rangle$, $\langle 9,11 \rangle$, $\langle 2,5 \rangle$.

3. Якщо X − множина студентів Академії, а Y − множина груп Академії, то відношення множин X і Y є множина

$$\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | x - \textit{студент групи } y\}.$$

4. Якщо X − множина товарів у магазині, а $Y = R^{+}$ − множина невід'ємних дійсних чисел, то відношення множин X і Y є множина

$$\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | y - \textit{ціна } x\}.$$

Внаслідок визначення бінарних відношень як ***спосіб їх задання*** можуть бути використані будь-які способи задання множин. Відношення, визначені на скінченних множинах, звичайно задаються:

1. ***Списком*** (***перерахуванням***) упорядкованих пар, для яких це відношення виконується.

2. ***Матрицею*** – бінарному відношенню $R \subseteq X \times X$, де $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ відповідає квадратна матриця A порядку n, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо між x_i й x_j є відношення R, або 0 – у протилежному разі, тобто

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } x_i R x_j, \\ 0, & \textit{у протилежному випадку}. \end{cases}.$$

<u>Приклад 2.2</u>. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Знайти декартові добутки $A \times B$ і $B \times A$, а також $(A \times B) - (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) + (B \times A)$.

Розв'язання. $A \times B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$;

$$B \times A = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\};$$

$$(A \times B) - (B \times A) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\};$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\};$$

$$(A \times B) + (B \times A) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}.$$

<u>Приклад 2.3</u>. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Задати в явному вигляді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо це відношення R означає:

а) "мати спільний дільник, відмінний від одиниці";

б) "їхня сума – число, кратне 3".

Розв'язання. а) Відношення R_1 може бути записане в такий спосіб

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \in A\times A \mid x \text{ і } y \text{ мають спільний дільник, відмінний від 1}\}$$

Список відношення R_1:

$R_1 = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,10\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,10\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 6,10\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,6\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 8,10\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,6\rangle, \langle 9,9\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,4\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,6\rangle, \langle 10,8\rangle, \langle 10,10\rangle\}$.

Матриця відношення R_1 наведена на рис. 2.3,а;

б) відношення R_2 може бути записане так:

$$R_2 = \{\langle x, y\rangle \in A\times A \mid x + y \text{ кратне } 3\}.$$

Список відношення R_2:

$R_2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,8\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 5,10\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,9\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 7,8\rangle, \langle 8,1\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,7\rangle, \langle 8,10\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,6\rangle, \langle 9,9\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,8\rangle\}$.

Матриця відношення R_2 наведена на рис. 2.3,б.

R_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

а

R_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

б

Рис. 2.3.

2.2. Функції

<u>Визначення 2.6</u>. ***Функцією*** f називається таке відношення R, ніякі два різних елементи якого не мають однакових перших координат. Тобто, f є функцією тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

- елементами f є впорядковані пари;

- якщо впорядковані пари $\langle a,b\rangle$ і $\langle a,c\rangle$ - елементи функції f, то $b=c$.

Таке відношення f на $A\times B$ називається функцією з A в B і позначається $f:A\to B$.

Якщо $f:A\to B$ – функція і $\langle a,b\rangle\in f$, то говорять, що b *є функцією від* a, і пишуть $b=f(a)$.

<u>Визначення 2.7</u>. ***Область визначення*** $D(f)$ і ***область значень*** $E(f)$ функції f визначаються як для будь-якого відношення:

$$D(f)=\{a\,|\,\langle a,b\rangle\in f;\, a\in A,\, b\in B\}\subseteq A,\quad E(f)=\{b\,|\,\langle a,b\rangle\in f;\, a\in A,\, b\in B\}\subseteq B.$$

Якщо $I\subseteq D(f)$, то множина $f(I)=\{b\,|\,f(a)=b\ \textit{для деякого}\ a\in I\}$ називається ***образом*** множини I. Образом усієї області визначення $D(f)$ функції f служить її область значень $E(f)$.

<u>Приклад 2.4</u>. Які з представлених відношень є функціями:

а) $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 2,13\rangle\}$; б) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$;

в) $\{\langle x,x^2\rangle|x\in R\}$; г) $\{\langle x^2,x\rangle|x\in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що два елементи $\langle 2,7\rangle$ і $\langle 2,13\rangle$ мають однакову першу координату;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари зустрічається рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола;

г) відношення не є функцією, тому що його елементами є, наприклад, і $\langle 1,1\rangle$, і $\langle 1,-1\rangle$.

<u>Приклад 2.5</u>. Знайти область визначення і область значень функції:

а) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$; б) $\{\langle x,x^2\rangle|x\in R\}$.

Розв'язання:

а) область визначення функції $A=\{1,4,5,7\}$, а область значень - $B=\{2,3,11\}$;

б) область визначення - $x\in R$, а область значень - $y\in R^{+}$.

Нехай $D(f)=A$, тобто функція f всюди визначена на множині A.

Визначення 2.8. Функція $f:A\to B$ називається ***ін'єктивною*** (***ін'єкцією***), якщо з $f(a)=f(a')$ випливає $a=a'$. Ін'єктивна функція f переводить різні елементи $a\neq a'$ в різні $f(a)\neq f(a')$ (рис. 2.4,а).

Ін'єкція f має ***обернену*** функцію f^{-1}. Обернена функція $f^{-1}:E(f)\to A$ визначається як обернене відношення $f^{-1}=\{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle\in f;\ a\in A,\ b\in B\}$.

Областю значень оберненої функції f^{-1} служить область визначення A прямої функції f.

Визначення 2.9. Функція $f:A\to B$ називається "***відображенням на***" (***сюр'єктивною*** функцією або ***сюр'єкцією***), якщо для кожного $b\in B$ існує деяке $a\in A$ таке, що $f(a)=b$. Для сюр'єктивної функції f образ множини A збігається з усією множиною B: $f(A)=E(f)=B$ (рис. 2.4,б).

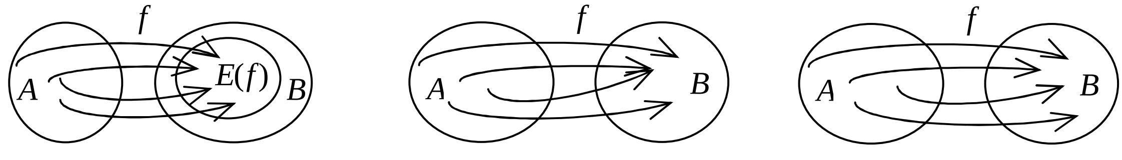
Визначення 2.10. Функція, що є одночасно ін'єктивною і сюр'єктивною, називається ***бієктивною*** (***взаємно однозначною***) (рис. 2.4,в).

Взаємно однозначна функція $f:A\to B$:

а) визначена на всій множині A: $D(f)=A$;

б) її областю значень служить вся множина B: $E(f)=B$;

в) вона переводить різні елементи $a\neq a'$ в різні $f(a)\neq f(a')$: з умови $f(a)=f(a')$ випливає $a=a'$.



а б в

Рис. 2.4.

Приклад 2.6. Чи є функція $f(x)=3x+5$ взаємно однозначною?

Розв'язання. $D(f)=R$; $E(f)=R$; $f(x_1)=3x_1+5$; $f(x_2)=3x_2+5$. З умови $f(x_1)=f(x_2)$ випливає $3x_1+5=3x_2+5$. Отже $x_1=x_2$ і функція є взаємно однозначною.

Приклад 2.7. Перевірити, що функція $y=5x-1$ є взаємно однозначною. Знайти функцію, обернену до даної.

Розв'язання. $D(f)=R$; $E(f)=R$; $y_1=5x_1-1$; $y_2=5x_2-1$. З умови $y_1=y_2$ випливає $5x_1-1=5x_2-1$. Отже $x_1=x_2$ і функція є взаємно однозначною. Обертаючи функцію, одержуємо $f^{-1}=\{\langle y,x\rangle | y=5x-1,\ x,y\in R\}$.

Переходячи до традиційних позначень аргументу і значення функції, обернена функція набуває вигляду $f^{-1}=\{\langle x,y\rangle | x=5y-1,\ x,y\in R\}$. Розв'язуючи рівняння відносно y, одержуємо $f^{-1}=\{\langle x,y\rangle | y=(x+1)/5,\ x,y\in R\}$.

Відповіді на запитання, чи є представлене відношення функцією і чи є ця функція взаємно однозначною, можна легко одержати з аналізу графіка.

Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи не можуть мати однакових перших координат. Тому щоб дане відношення f було функцією, довільний промінь, напрямлений паралельно осі Oy, повинен перетинати графік f не більше одного разу.

Взаємно однозначна функція переводить різні елементи в різні. Тому щоб дана функція f була взаємно однозначною, довільний промінь, напрямлений паралельно осі Ox, повинен перетинати графік f теж не більше одного разу.

Приклад 2.8. З'ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємно однозначні? У разі позитивної відповіді знайти обернені функції:

а) $f=\{\langle x,y\rangle | y^2=-x,\quad x,y\in R\}$; б) $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\quad x\in R,\ y\in R^+\right\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle | 3x-2y+6=0,\quad x,y\in R\}$.

Розв'язання.

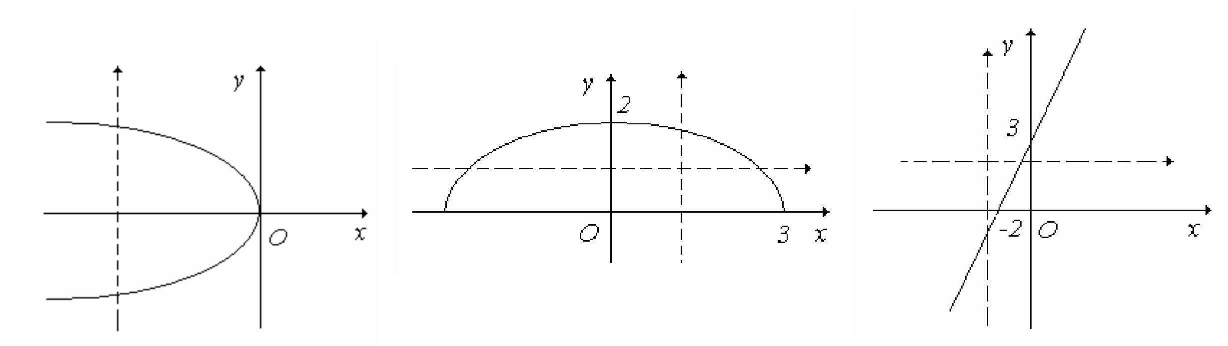
а) відношення не є функцією, тому що існують два різних елементи, що мають однакові перші координати (див. рис. 2.20, а);

б) відношення є функцією, тому що не існує елементів, які мають однакові перші координати. Але ця функція не є взаємно однозначною, оскільки існують елементи, що мають однакові другі координати (див. рис. 2.20, б);

в) відношення є функцією. Ця функція є взаємно однозначною, тому що переводить різні елементи в різні (див. рис. 2.20, в). Знайдемо функцію, обернену до даної:

$f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$; $\qquad f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$;

$f^{-1} = \{\langle x, y\rangle | 3y - 2x + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$; $\qquad f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \dfrac{2}{3}x - 2; \quad x, y \in R\right\}$.



а б в

Рис. 2.5.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

3.1. Основні поняття

Визначення 3.1. ***Висловлення*** – це розповідне речення, про яке можна однозначно сказати, що воно істинне чи хибне. Істинність або хибність, приписувана висловленню, називається його ***істинністним значенням***. Позначається "***істинність***" – 1, а "***хибність***" – 0.

Наприклад, речення "*Сонце – це зірка*", "*Балаклея – обласний центр України*" є висловленнями, причому перше – істинне, а друге – хибне. А речення “*Котра година?*”, “*Вивчити вірш*” не є висловленнями.

У математичних міркуваннях, як і в повсякденній мові, часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова *не*, або складені з простих речень за допомогою сполучників *і, або, якщо …, то, тоді й тільки тоді, коли,* що називаються ***сентенційними зв’язками***. На відміну від повсякденної мови, у математичній логіці зміст таких висловлень визначений однозначно.

Визначення 3.2. Висловлення, що не містить сентенційних зв’язок, називається ***простим***. Висловлення, що містить зв’язки, називається ***складним***.

Будемо позначати висловлення буквами латинського алфавіту A, B, C, ..., P, Q, R, … .

Візьмемо наступні прості висловлення:

$A =$“*я прокидаюся рано*”; $B =$“*я йду на роботу*”.

За допомогою п'яти сентенційних зв’язок можна утворити такі складні висловлення:

заперечення – це висловлення, видозмінене за допомогою слова *не*; позначається як $\overline{A}$, $\sim A$. Наприклад, $\overline{A} =$“*я не прокидаюся рано*”;

кон’юнкція – це висловлення, яке утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *і*; позначається як $A \wedge B$. Наприклад, $A \wedge B =$“*я підіймаюсь рано і йду на роботу*”;

диз'юнкція - це висловлення, яке утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *або*; позначається як $A \vee B$. Наприклад, $A \vee \overline{B} =$“*я прокидаюся рано або не йду на роботу*”;

імплікація - це висловлення, яке утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *якщо …, то*; позначається як $A \to B$. Наприклад, $A \to B =$“*якщо я прокидаюся рано, то йду на роботу*”;

еквівалентність - це висловлення, утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *тоді і тільки тоді, коли*; позначається як $A \leftrightarrow B$. Наприклад, $A \leftrightarrow B =$“*я прокидаюся рано тоді й тільки тоді, коли йду на роботу*”.

Визначення 3.3. Символи $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ називаються ***бінарними зв’язками***, оскільки вони з'єднують два висловлення, а символ ~ - ***унарною зв'язкою***, тому що застосовується тільки до одного висловлення.

Розглянемо ще одну бінарну зв'язку – ***виключне логічне або*** (***нерівнозначність***, ***кільцева сума***, ***сума за модулем 2***). Позначається як $P \oplus Q$ і читається "або P, або Q". Висловлення $P \oplus Q$ істинне, коли істиннісні значення P і Q не збігаються, і хибне – у протилежному випадку.

<u>Приклад 3.1</u>. Подати логічними формулами наступні висловлення:

1) "*Сьогодні не світить сонце*";
2) "*Я піду гуляти або залишуся вдома*";
3) "*Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду*";
4) "*Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії*";
5) "*Родину варто створювати тоді й тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові й поваги*";
6) "*Надворі ясно або похмуро*";
7) "*Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу*".

Розв'язання.

1) Висловлення "*Сьогодні не світить сонце*" утворено запереченням висловлення "*Сьогодні світить сонце*". Останнє позначимо через P, тоді початкове висловлення є складним. Його представимо логічною формулою: $\overline{P}$.

2) Складне висловлення "*Я піду гуляти або залишуся вдома*" утворене з двох простих за допомогою зв'язки "*або*": P - "*Я піду гуляти*"; Q - " *Я залишуся вдома*". Отже, маємо логічну формулу $P \vee Q$.

3) Складне висловлення "*Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду*" утворене з двох простих за допомогою зв'язки "*і*": P - "*Спортсмен здобув перемогу*"; Q - "*Спортсмен одержав заслужену нагороду*". Отже, маємо логічну формулу $P \wedge Q$.

4) Складне висловлення "*Якщо цех перевиконає план, то робітники*

одержать премії", утворене з двох простих за допомогою зв'язки "*якщо …, то*": P - "*Цех перевиконає план*"; Q - "*Робітники одержать премії*". Отже, маємо логічну формулу $P \to Q$.

5) Складне висловлення "*Родину варто створювати тоді й тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові й поваги*" утворене з трьох простих за допомогою зв'язок "*тоді й тільки тоді*" та "*і*": P - "*Родину варто створювати*"; Q - "*Між молодими людьми є почуття любові*"; R - "*Між молодими людьми є почуття поваги*". Отже, маємо логічну формулу $P \to (Q \wedge R)$.

6) Складне висловлення "*Надворі ясно або похмуро*" утворене з двох простих: P - "*Надворі ясно*"; Q - "*Надворі похмуро*" за допомогою зв'язки "*або, що виключає*" - $\oplus$, тому що одночасно надворі не може бути і ясно, і похмуро. Отже, маємо логічну формулу: $P \oplus Q$.

7) Складне висловлення "*Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу*" розіб'ємо на прості: P - "*Парубок зневажає фізичними вправами*"; Q - "*Парубок годинами сидить за комп'ютером*"; R - "*Виникає погіршення самопочуття*"; S - "*Виникає погана постава*". Логічна формула, що описує дане висловлення, буде мати вигляд $(P \vee Q) \to (R \wedge S)$.

Прості висловлення можуть бути істинними або хибними незалежно один від одного, але вони визначають значення складного висловлення.

Таблиці істинності для розглянутих вище логічних формул дозволяють легко визначити значення складного висловлення.

Заперечення	
P	$\overline{P}$
1	0
0	1

		Кон'юнкція	Диз'юнкція	Імплікація	Еквівалентність
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Висловлення $\overline{P}$ істинне, коли висловлення P - хибне, і хибне – у протилежному випадку. Наприклад, якщо P - “*сьогодні холодно*”, то $\overline{P}$ - “*сьогодні не холодно*”.

Висловлення $P \wedge Q$ істинне тільки тоді, коли обидва висловлення істинні, і хибне – у всіх інших випадках. Прикладом кон’юнкції може бути відповідь на запитання: “При яких умовах учень, який закінчує школу, може бути студентом?”. Якщо прийняти за P - “*одержати атестат зрілості*”, а за Q - “*пройти конкурсний відбір у ВНЗ*”, то учень буде студентом, коли одержить атестат зрілості й пройде конкурсний відбір $(P=1,\ Q=1,\ P \wedge Q=1)$.

Висловлення $P \vee Q$ хибне тільки тоді, коли обидва з простих висловлень хибні, та істинне - у всіх інших випадках. Як приклад, розглянемо наступні висловлення: P - “*на вулиці йде дощ*”, Q - “*хтось забув виключити душ*”. Тоді $P \vee Q$ - “*я чую шум, спричинений водою*”. Це можливо, якщо на вулиці йде дощ, або якщо хтось забув виключити душ, або при виконанні обох цих умов.

Висловлення $P \to Q$ хибне тільки тоді, коли P - істинне, а Q - хибне; і істинне у всіх інших випадках. Висловлення “*якщо ..., то*” має пояснюючий характер. Такий характер імплікації пов'язаний з причинно-наслідковим відношенням, при якому P виступає в ролі ***засновку*** (***посилки***) імплікації, а Q - ***наслідку*** (***висновку***). Якщо P - “*на вулиці йде дощ*”, а Q - “*над моєю головою розкрита парасолька*”, тоді $P \to Q$ -“*я залишуся сухим*” буде помилковим тільки в тому разі, коли на вулиці йде дощ, а парасолька не розкрита $(P=1,\ Q=0,\ P \to Q=0)$.

Висловлення $P \leftrightarrow Q$ істинне, коли значення P і Q збігаються, і хибне – у протилежному випадку. Оскільки еквівалентність виражається через кон’юнкцію двох імплікацій $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, то це відношення виникає при одночасному виконанні двох умов: “з P прямує Q” і “з Q прямує P”.

Наприклад, присвоїмо висловленням P і Q значення 1, якщо P і Q означають “*дочка*”, і 0, якщо P і Q означають “*син*”. Тоді складне висловлення

$P \leftrightarrow Q$ - “*у родині одностатеві діти*” істинне тоді й тільки тоді, коли або $P = Q = 1$, або $P = Q = 0$.

При записі складних висловлень у символічній формі часто виникає необхідність використання великої кількості дужок. Щоб усунути цю незручність, домовимося, що $\leftrightarrow$ є найсильніша зв’язка (має найбільшу область дії), за нею йде $\rightarrow$, далі – $\vee$, а за нею $\wedge$, потім ~ - найслабша зв’язка. Необхідно пам'ятати, що спочатку виконують більш слабкі зв’язки, а потім – більш сильні.

Якщо істиннісні значення простих компонентів відомі, то істиннісне значення складного висловлення може бути визначене з використанням таблиць істинності.

Приклад 3.2. Встановити істиннісне значення висловлення

$$A \vee B \rightarrow C \leftrightarrow A \wedge \sim B \rightarrow C,$$

якщо A і B - істинні $(A = 1,\ B = 1)$, а C - хибне $(C = 0)$.

Розв’язання. Знайти істиннісне значення висловлення можна досить швидко, якщо написати під кожним простим висловленням його істиннісне значення, а істиннісне значення кожного складного висловлення – під відповідною зв’язкою. Для зручності читання послідовні кроки можуть бути записані один під іншим:

A	$\vee$	B	$\rightarrow$	C	$\leftrightarrow$	A	$\wedge$	~	B	$\rightarrow$	C
1		1		0		1			1		0
								0			
	1						0				
			0							1	
					0						

Звідси можемо зробити висновок: дане висловлення хибне.

Складне висловлення може приймати як істинне, так і хибне значення залежно від значень, приписуваних простим компонентам. Для того, щоб однозначно вказати ті ситуації, коли складне висловлення є істинним, необхідно врахувати всі можливі випадки. З цією метою ми будемо будувати таблиці істинності складних висловлень, використовуючи таблиці істинності простих компонентів.

Наведемо два еквівалентних способи побудови таблиці істинності складного висловлення. Перший полягає в тому, що складне висловлення ми розбиваємо на прості й встановлюємо істиннісне значення кожної зв'язки. При другому способі ми записуємо істиннісні значення під кожною зв'язкою. Проілюструємо обидва підходи на прикладі.

Приклад 3.3. Побудувати таблицю істинності висловлення $(\sim A \to B) \wedge C$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності двома способами:

A	B	C	$\sim A$	$\sim A \to B$	$(\sim A \to B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A	B	C	$(\sim A \to B) \wedge C$		
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

3.2. Істиннісна функція

Числення висловлень призначене для аналізу логічних зв'язків між реченнями, які залежать тільки від побудови нових речень з вихідних за допомогою уже відомих нам сентенційних зв'язок. Для такого аналізу необхідна наявність вихідної непустої множини простих речень і виконання наступних припущень:

а) кожне просте речення є висловленням, тобто кожному простому реченню можна поставити у відповідність його істиннісне значення;

б) кожне з висловлень, що аналізується, складається з простих висловлень багаторазовим використанням сентенційних зв'язок і приймає істиннісне значення, виходячи з наведених раніше таблиць істинності для сентенційних зв'язок, відповідно до істиннісних значень простих речень-висловлень.

Отже нехай дана непуста множина простих висловлень A, B ,… Розширимо цю множину, приєднавши до неї всі ті висловлення, які можна утворити з простих, багаторазово усілякими способами використовуючи різні сентенційні зв'язки. Тобто, елементами розширеної множини будуть: $\sim A$; $A \vee B$; $B \to (\sim B \wedge A)$; $A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee \sim A$;… Елементи цієї множини називають ***формулами***, причому елементи вихідної множини – ***простими формулами*** (***компонентами***), а інші – ***складними формулами***.

Кожній простій формулі ставиться у відповідність один елемент із множини $\{1,0\}$ – її істиннісне значення. Істиннісне значення складної формули визначається відповідно до таблиць істинності сентенційних зв'язок.

Якщо простими компонентами формули A служать p_1, p_2, …, p_n, то для знаходження істиннісного значення формули A за істиннісними значеннями простих компонентів p_1, p_2, …, p_n, необхідно побудувати таблицю істинності, що складається з 2^n рядків.

Визначення 3.4. ***Істиннісна функція*** – це функція від n аргументів, кожний з яких може приймати значення 1 або 0, і сама функція може приймати значення 1 або 0.

Позначати істиннісні функції будемо як $f(p_1, p_2, ..., p_n)$, $g(q_1, q_2, ..., q_n)$ і т.д.

Під істиннісними функціями будемо розуміти елементи множини ϑ, що має такі властивості:

а) кожна з функцій $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ - елемент множини ϑ;

б) якщо функція f - елемент множини ϑ, то елементом множини ϑ буде і функція, отримана підстановкою f замість аргументу в кожну з функцій, перелічених вище.

Як приклади, можна навести наступні істиннісні функції: $(p \to q) \vee \sim q$, $p \leftrightarrow p \wedge (q \to \sim p)$, … .

3.3. Еквівалентні висловлення. Тавтології

Особливий інтерес у численні висловлень представляють складні висловлення, що мають різну побудову, але приймають істинне значення в тих же самих випадках, тобто мають однакові таблиці істинності. Такі висловлення називають ***логічно еквівалентними***.

Наприклад, нехай P - “*на вулиці холодно*”, Q - “*я легко вдягнений*”. Розглянемо висловлення - “*невірно, що на вулиці холодно і я легко вдягнений*” - $\sim(P \wedge Q)$ і висловлення - “*на вулиці не холодно або я не легко вдягнений*” - $\sim P \vee \sim Q$. Побудуємо таблиці істинності:

P	Q	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

У всіх чотирьох рядках істиннісні значення обох складних формул збігаються. Отже два розглянутих висловлення – логічно еквівалентні.

Логічно еквівалентні висловлення A і B позначають як A ***eq*** B.

З умовним висловленням – імплікацією $(A \to B)$ пов'язані ще три типи висловлень: ***конверсія***, ***інверсія*** і ***контрапозиція***. Визначаються вони так:

$A \to B$ - ***імплікація***; $B \to A$ - ***конверсія*** висловлення $A \to B$;

$\sim A \to \sim B$ - ***інверсія*** висловлення $A \to B$;

$\sim B \to \sim A$ - ***контрапозиція*** висловлення $A \to B$.

Приклад 3.4. Нехай дано висловлення-імплікація “*Якщо він їсть вітаміни, то він здоровий*”, тоді:

“*Якщо він здоровий, то він їсть вітаміни*” - конверсія;

“*Якщо він не їсть вітаміни, то він не здоровий*” - інверсія;

“*Якщо він не здоровий, то він не їсть вітаміни*” - контрапозиція.

При побудові висловлення-імплікації і пов'язаних з ним конверсії, інверсії і контрапозиції важливий не порядок слів у висловленні, а те, яка компонента висловлення є частиною “*якщо*”, а яка - частиною “*то*”.

Закон контрапозиції говорить, що імплікація і його контрапозиція ***логік-***

но еквівалентні, у чому можна легко переконатися, зрівнявши їхні таблиці істинності. Еквівалентність і контрапозиція умовних висловлень мають у математиці велике значення, оскільки часто набагато простіше довести теорему від супротивного, ніж дати її пряме доведення. Неважко також показати, що конверсія й інверсія імплікації також мають однакові таблиці істинності, а, отже, – еквівалентні. У той же час імплікація (або її контрапозиція) і конверсія (або інверсія) мають різні таблиці істинності. Нерозуміння цього факту приводить до побудови помилкових логічних міркувань.

Визначення 3.5. Висловлення, істинне при всіх розподілах значень простих компонентів, називається ***тотожно істинним*** (***загальнозначущим*** або ***тавтологією***). Висловлення, хибне при всіх розподілах значень простих компонентів, називається ***тотожно хибним*** (***протиріччям***).

Добре відомими прикладами тавтології є аксіоми і теореми в математиці, тому що вони істинні завжди.

Маючи логічно істинне висловлення – тавтологію, легко побудувати логічно хибне висловлення – протиріччя. Для цього досить взяти заперечення тавтології. Якщо A - тавтологія, то $\sim A$ - протиріччя, і навпаки.

Для того щоб вирішити питання про те, дана формула A є тавтологією чи ні, необхідно розглянути її таблицю істинності. Формула A з n компонентами є тавтологією тоді й тільки тоді, коли її істиннісне значення є 1 при кожному з 2^n наборів значень її простих компонентів..

Приклад 3.5. Чи є висловлення $A \wedge (A \to B) \to B$ тавтологією?

Розв'язання. Розглянемо таблицю істинності даного висловлення:

A	B	$A \wedge (A \to B) \to B$		
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	0	0	1	**1**

Як випливає з таблиці істинності, при кожному з $2^2 = 4$ розподілів значень простих компонентів, формула, що описує дане висловлення, приймає значення 1. Отже дане висловлення є тавтологією.

Як довідковий матеріал, представимо список деяких тавтологій. (Самостійно перевірте наведені тавтології шляхом побудови їхніх таблиць істинності).

Тавтологічні імплікації:

1. $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$;
2. $\sim B \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A$;
3. $\sim A \wedge (A \vee B) \rightarrow B$;
4. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$;
5. $A \wedge B \rightarrow A$;
6. $A \rightarrow A \vee B$;
7. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
8. $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$;
9. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$;
10. $(A \rightarrow B \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$;
11. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C)$;
12. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow B \wedge C)$;
13. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

Тавтологічні еквіваленції:

15. $A \leftrightarrow A$;
16. $\sim\sim A \leftrightarrow A$;
17. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee C \rightarrow B)$;
18. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$;
19. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$;
20. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$;
21. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$;

21а. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;

22. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;

22а. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;

23. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

23а. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

24. $A \vee A \leftrightarrow A$;

24а. $A \wedge A \leftrightarrow A$;

25. $\sim (A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$;

25а. $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$;

Тавтології для виключення зв'язувань:

26. $A \rightarrow B \leftrightarrow \sim A \vee B$;
27. $A \rightarrow B \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$;
28. $A \vee B \leftrightarrow \sim A \rightarrow B$;
29. $A \vee B \leftrightarrow \sim (\sim A \wedge \sim B)$;
30. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$;
31. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$;
32. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Замість того, щоб для обчислення істиннісного значення формули користуватися таблицями істинності, можна вдатися до арифметичних процедур. Для цього приймають наступні угоди:

1. Формула інтерпретується як істиннісна функція, де кожен простий компонент розглядається як змінна, котрій можна приписати значення 1 або 0.

2. Суми й добутки доданків і співмножників 1 і 0, що входять у формули, обчислюють як у звичайній арифметиці, за винятком 1+1=0.

Легко перевірити (за допомогою таблиць істинності), що ***основні істиннісні функції*** задаються наступними формулами:

$\sim P = 1 + P$; $\quad P \wedge Q = P + Q + PQ$; $\quad P \vee Q = PQ$;

$P \to Q = (1+P)Q$; $\quad P \leftrightarrow Q = P + Q$.

У цих термінах тавтологіями є ті істиннісні функції, які тотожно рівні нулю.

<u>Приклад 3.6</u>. Довести, що формула $A \to (B \to A \wedge B)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Розв'язання. Виконаємо ряд перетворень: $A \wedge B = A + B + AB$;

$B \to A \wedge B = (1+B)(A+B+AB) = (1+B)A + (1+B)B + (1+B)AB$.

Оскільки $(1+B)B = 0$, то другий і третій доданки дорівнюють нулю, отже, $B \to A \wedge B = (1+B)A$. Далі $A \to (B \to A \wedge B) = (1+A)(1+B)A = (1+A)A(1+B) = 0$, тому що $(1+A)A = 0$. Отже, дана формула є тавтологією.

Зазначимо, що в даній алгебрі $2A$ і $(1+A)A$ тотожно дорівнюють нулю, що істотно полегшує спрощення довгих виразів.

4. АЛГЕБРА ЛОГІКИ

4.1. Логічні функції. Основні поняття

Алгебра логіки є самостійним розділом математичної логіки. Предметом її вивчення є побудова складних логічних висловлень, що подаються логічними формулами, і методів установлення їхньої істинності.

Алгебра - це непорожня множина разом із заданою на ній сукупністю операцій.

Нехай $B = \{0,1\}$ - бінарна множина з елементами 0 і 1, що не мають арифметичного змісту, логічна інтерпретація яких – "істинно", "хибно" або "так", "ні".

Визначення 4.1. Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями P_2 на ній, називається ***алгеброю логіки***. При цьому множина B називається ***основною множиною*** (***носієм***) алгебри, а множина операцій P_2 - ***сигнатурою*** алгебри.

Визначення 4.2. ***Функцією алгебри логіки*** (***логічною функцією, булевою функцією***) f від n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається n-вимірна логічна операція на множині B. Тобто, $f: B^n \to B$. Логічна функція - функція від логічних змінних - також може приймати тільки два логічних значення 0 або 1.

Множину всіх логічних функцій n змінних будемо позначати як $P_2(n)$.

Визначення 4.3. ***Логічною формулою*** називається вираз, що складається з букв, знаків логічних операцій і дужок. При цьому букви позначають логічні змінні. Кожна формула задає логічну функцію.

Будь-яку логічну функцію можна задати або логічною формулою, або за допомогою таблиці істинності.

При визначенні логічної функції за допомогою таблиці істинності у таблиці ліворуч виписують всі можливі набори значень логічних змінних, а праворуч – значення функції, що відповідають цим наборам. Набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, називається ***одиничним набором*** функції. Набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, називається ***нульовим набором*** функції.

Число всіх можливих наборів, що розрізняються, логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Ця множина з 2^n наборів є ***областю визначення*** логічної функції. Число всіх різних функцій n змінних дорівнює числу можливих розміщень нулів і одиниць у стовпці таблиці з 2^n рядками, тобто 2^{2^n}.

Визначення 4.4. Змінна x_i логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ називається ***несуттєвою*** (***фіктивною***), якщо $f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних, тобто зміна

x_i в будь-якому наборі значень $x_1,...,x_n$ не змінює значення функції.

Нехай змінна x_i є фіктивною для функції $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$. Вилучимо з таблиці істинності стовпець аргументу x_i. Тоді буде отримана нова таблиця для функції $n-1$ змінної, котру позначимо як $g(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$. Отже функція g отримана з функції f шляхом вилучення фіктивної змінної.

Визначення 4.5. Дві функції називають ***рівними***, якщо одну можна одержати з іншої шляхом вилучення або додавання фіктивних змінних.

Логічних функцій однієї змінної $2^{2^1}=4$. Множина всіх логічних функцій однієї змінної представлена в табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут $\varphi_0(x)=0$, $\varphi_3(x)=1$ константи 0 і 1 відповідно. Значення цих функцій не залежить від змінної x, отже змінна x є фіктивною. Функції $\varphi_1(x)=x$ - повторення змінної, $\varphi_2(x)=\bar{x}$ - заперечення змінної.

Логічних функцій двох змінних $2^{2^2}=16$. Множина всіх логічних функцій двох змінних представлена в табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

x_1	x_2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Дамо визначення функцій, наведених у табл. 4.2:

$\phi_0=0$ - ***константа 0***; $\phi_1=x_1\wedge x_2$ - ***кон'юнкція***;

$\phi_2=\overline{x_1\to x_2}$ - ***заперечення імплікації***; $\phi_3=x_1$ - ***повторення*** x_1;

$\phi_4=\overline{x_1\leftarrow x_2}$ - ***заперечення коімплікації***; $\phi_5=x_2$ - ***повторення*** x_2;

$\phi_6 = x_1 \oplus x_2$ - ***додавання за модулем 2***; $\phi_7 = x_1 \vee x_2$ - ***диз'юнкція***;

$\phi_8 = x_1 \downarrow x_2$ - ***стрілка Пірса***; $\phi_9 = x_1 \leftrightarrow x_2$ - ***еквівалентність***;

$\phi_{10} = \overline{x}_2$ - ***заперечення*** x_2; $\phi_{11} = x_1 \leftarrow x_2$ - ***коімпликація***;

$\phi_{12} = \overline{x}_1$ - ***заперечення*** x_1; $\phi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$ - ***імплікація***;

$\phi_{14} = x_1 | x_2$ - ***штрих Шеффера***; $\phi_{15} = 1$ - ***константа 1***.

Як можна помітити, з 16 функцій двох змінних шість мають фіктивні змінні: у функціях ϕ_0 і ϕ_{15} фіктивні змінні x_1 і x_2; у функціях ϕ_5 і ϕ_{10} фіктивна змінна x_1; у функціях ϕ_3 і ϕ_{12} фіктивна змінна x_2.

Визначення 4.6. ***Суперпозицією функцій*** $f_1,..., f_n$ (***складеною функцією***) називається функція f, отримана за допомогою підстановок цих функцій одна в одну й перейменування змінних.

Приклад 4.1. Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ і f_1 означає кон'юнкцію, f_2 - диз'юнкцію, f_3 - імплікацію, f_4 - додавання за модулем 2. Представити складену функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ формулою й обчислити її значення на наборі $(0,0,1)$

Розв'язання. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$; $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \rightarrow x_1)$.

$(x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \rightarrow x_1)$
0 1 0 0 0
1
0 1
1

Обчислимо значення f на наборі $(0,0,1)$, для чого підставимо в отриману формулу значення змінних. Тобто при даному наборі змінних функція істинна.

Приклад 4.2. Обчислити значення функції $f = \phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$ на наборі $(1,0,1)$.

Розв'язання. Скористаємося табл. 4.2: $\phi_1(1,0) = 0$, $\phi_{11}(1,0) = 1$, а $\phi_6(0,1) = 1$. Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Визначення 4.7. ***Еквівалентними*** (***рівносильними***), називають формули, що подають ту саму функцію. Еквівалентність формул в алгебрі логіки позначається символом "=".

Для того, щоб установити еквівалентність формул, треба скласти їх таблиці істинності й порівняти їх за кожним набором змінних.

Приклад 4.3. Довести еквівалентність формул

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2).$$

Розв'язання. Складемо таблиці істинності наведених формул.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Як бачимо, таблиці істинності формул $x_1 \oplus x_2$ і $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ збігаються. Звідси робимо висновок, що формули еквівалентні.

Використовуючи таблиці істинності, можна довести наступні ***логічні еквівалентності*** (***закони логіки Буля***):

1. ***Закони ідемпотентності:*** $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$.

2. ***Закон подвійного заперечення:*** $\bar{\bar{x}} = x$.

3. ***Властивості комутативності:*** $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$.

4. ***Властивості асоціативності:*** $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z$;

   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$.

5. ***Властивості дистрибутивності:*** $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

6. ***Закони де Моргана:*** $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

7. ***Властивості констант:*** $x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = x$; $x \vee 0 = x$; $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$.

8. ***Закон протиріччя:*** $x \wedge \bar{x} = 0$.

9. ***Закон виключення третього:*** $x \vee \bar{x} = 1$.

10. ***Закон поглинання:*** $(x \wedge y) \vee x = x$.

11. ***Закон склеювання:*** $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$.

12. ***Закон узагальненого склеювання:***

    $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z)$.

13. ***Розкриття імплікації і еквівалентності:*** $x \to y = \bar{x} \vee y$;

    $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Тотожні перетворення становлять величезний інтерес у задачах по спрощенню формул. Оскільки формули часто є суперпозицією інших формул і функцій, то можна говорити про входження у формули інших формул, які називають ***підформулами***. При виконанні тотожних перетворень будь-які підформули можна заміняти еквівалентними їм.

4.2. Булева алгебра. Досконалі нормальні форми

Одна і та сама логічна функція може бути представлена формулами, що включають різні набори логічних операцій. Виявляється, існують такі набори логічних функцій (операцій), за допомогою яких можна визначити іншу довільну логічну функцію.

Визначення 4.8. Система функцій Σ називається ***функціонально повною*** (***базисом***), якщо будь-яка булева функція може бути подана у вигляді формули, що складається тільки з функцій цієї системи.

Існує ряд функціонально повних систем логічних функцій, наприклад, $\{\wedge,\vee,\sim\}$, $\{\wedge,\sim\}$, $\{\vee,\sim\}$, $\{\ |\ \}$, $\{\downarrow\}$, $\{\wedge,\oplus,1\}$, $\{\rightarrow,\sim\}$, $\{\vee,\sim,\oplus\}$, $\{\wedge,\sim,\oplus\}$ і ін.

Найбільш вивченим і використовуваним є базис $\{\wedge,\vee,\sim\}$. Формули, що містять тільки знаки функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення, називаються ***булевими***.

Визначення 4.9. Алгебра $(P_2,\wedge,\vee,\sim)$, основною множиною якої є множина всіх логічних функцій P_2, а операціями - кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення, називається ***булевою алгеброю логічних функцій***. Операції і формули булевої алгебри називаються ***булевими***.

Система операцій булевої алгебри $\{\wedge,\vee,\sim\}$ функціонально повна. Отже перехід від табличного завдання будь-якої логічної функції до булевої формули завжди можливий.

Теорема 4.1. Будь-яка логічна функція може бути представлена булевою формулою, тобто як суперпозиція кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення.

Наслідок 1. Будь-яка логічна функція, крім константи 0, може бути представлена формулою:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vee\ x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}; \quad f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1,$$

яку називають ***досконалою диз'юнктивною нормальною формою*** (***ДДНФ***).

Тут диз'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких функція $f = 1$. ДДНФ функції f містить стільки диз'юнкцій, скільки одиниць у ряді функції f таблиці істинності. Кожному одиничному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ відповідає кон'юнкція всіх змінних, в якій x_i взято із запереченням, якщо $\sigma_i = 0$, і без заперечення, якщо $\sigma_i = 1$:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \ \sigma = 0, \\ x, \ \sigma = 1. \end{cases}$$

Зауваження 1. Єдина функція, що не має ДДНФ, – це константа 0, оскільки в її таблиці істинності відсутні одиничні набори.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f та її ДДНФ. Отже для довільної логічної функції, крім константи 0, ДДНФ єдина.

Приклад 4.4. Записати ДДНФ функції, заданої таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання. Виділимо набори змінних, яким відповідають одиничні значення функції. ДДНФ даної функції має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, x_3 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, \bar{x}_2\, x_3.$$

Наслідок 2. Будь-яка логічна функція, крім константи 1, може бути представлена формулою

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\sigma}_i} \right); \quad f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0,$$

яку називають ***досконалою кон'юнктивною нормальною формою*** (***ДКНФ***).

Тут кон'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких функція $f = 0$. ДКНФ функції f містить стільки кон'юнкцій, скільки нулів у ряді функції f таблиці істинності. Кожному нульовому набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ відповідає диз'юнкція всіх змінних, в якій x_i взято із запереченням, якщо $\sigma_i = 1$, і без заперечення, якщо $\sigma_i = 0$.

Зауваження 2. Єдина функція, що не має ДКНФ, – це константа 1, оскільки в її таблиці істинності відсутні нульові набори.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f та її ДКНФ. Отже ДКНФ для всякої логічної функції, крім константи 1, єдина.

Приклад 4.5. Записати ДКНФ функції, заданої таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання. Виділимо набори змінних, яким відповідають нульові значення функції. ДКНФ даної функції має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

Зауваження 3. Із двох формул – ДДНФ і ДКНФ – звичайно вибирають ту, яка коротша. Тобто якщо таблиця функції f містить менше одиничних наборів, то ДДНФ; якщо містить менше нульових наборів, то ДКНФ.

Приклад 4.6. Логічну функцію трьох змінних

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2)\,\overline{x_3}) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$$

подати булевою формулою: а) у вигляді ДДНФ, б) у вигляді ДКНФ.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності формули

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_3$	$x_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee x_2)\overline{x}_3$	$x_1 \leftrightarrow x_3$	$((x_1 \vee x_2)\overline{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

а) ДДНФ функції має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_1}\,x_3 \vee x_1\,x_2\,x_3 .$$

б) ДКНФ функції має вигляд $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$.

<u>Приклад 4.7</u>. На підставі табл. 4.2 визначити ДКНФ $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$.

Розв'язання. Скориставшись табл. 4.2, запишемо ДКНФ штриха Шеффера: $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

<u>Приклад 4.8</u>. На підставі табл. 4.2 визначити ДДНФ $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$.

Розв'язання. Скориставшись табл. 4.2, запишемо ДДНФ стрілки Пірса:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} .$$

5. ГРАФИ

Графічне подання розв'язання різних прикладних задач нам добре відомо. До графічних подань у широкому смислі можуть бути віднесені рисунки, креслення, графіки, діаграми, блок-схеми і т.п. За їх допомогою наочно ілюструються залежності процесів і явищ, логічні, структурні, причинно-наслідкові та інші взаємозв'язки. ***Теорія графів*** має свою власну проблематику. На основі цієї теорії будують моделі різноманітних задач, таких як маршрутизації, розподілу ресурсів, дискретної оптимізації, мережевого планування і керування, аналізу і проектування організаційних структур, аналізу процесів їх функціонування та багато іншого.

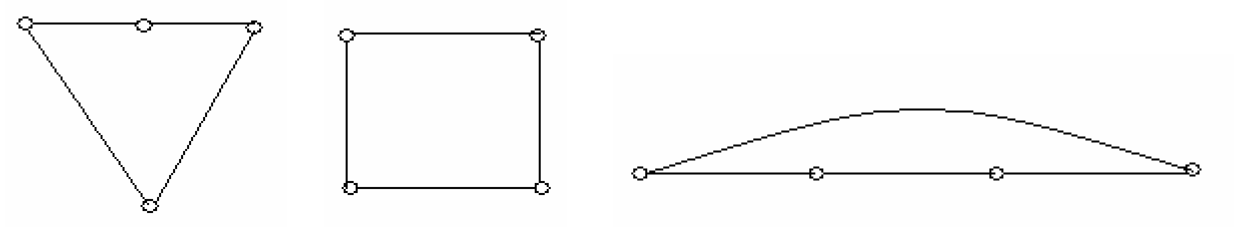
5.1. Основні поняття

Визначення 5.1. ***Графом*** G називається сукупність двох множин: точок V і ліній E, між якими визначене ***відношення інцидентності*** (***відповідності***), причому кожен елемент $e \in E$ інцидентний рівно двом елементам $v', v'' \in V$. Елементи множини V називаються ***вершинами***, а елементи множини E - ***ребрами*** графа. Вершини і ребра графа називаються його ***елементами***, тому пишуть $v \in G$ і $e \in G$. Вершина v і ребро e ***інцидентні*** одна одному, якщо точка v – кінець лінії e.

Визначення 5.2. Якщо ребро e з'єднує вершини v', v'', тоді вони є для нього кінцевими точками і називаються ***суміжними*** вершинами. Два ребра називаються ***суміжними***, якщо вони інцидентні спільній вершині.

Слід зазначити, що при зображенні графа не всі деталі рисунка мають значення. Зокрема, несуттєвими є довжина і кривизна ребер, взаємне розташування вершин на площині. Принциповим є тільки відношення інцидентності.

Приклад 5.1. Моделі, зображені на рис. 5.1 а, б, в, з погляду теорії графів однакові.

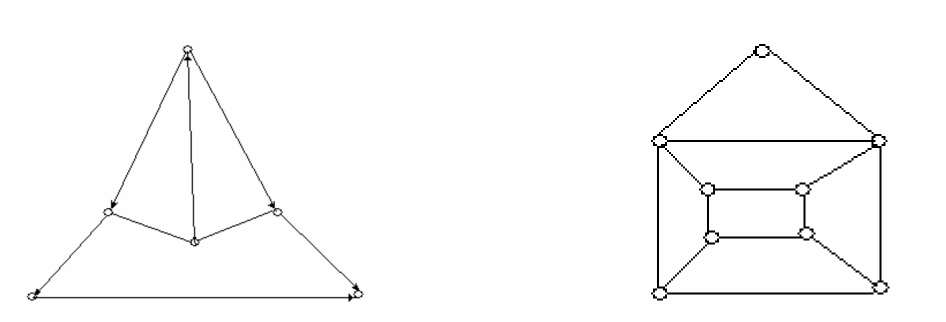


а б в

Рис. 5.1.

У деяких задачах інцидентні ребру вершини нерівноправні й розглядаються в певному порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрямок від першої інцидентної вершини до другої.

Визначення 5.3. Напрямлені ребра називають ***орієнтованими ребрами*** (***дугами***). Перша по черзі вершина називається ***початком*** дуги, а друга – її ***кінцем***. Граф, що містить напрямлені ребра, називається ***орієнтованим*** (***орграфом***) (рис. 5.2, а), а граф, що не містить напрямлених ребер – ***неорієнтованим*** (***н-графом***) (рис. 5.2, б).



а б

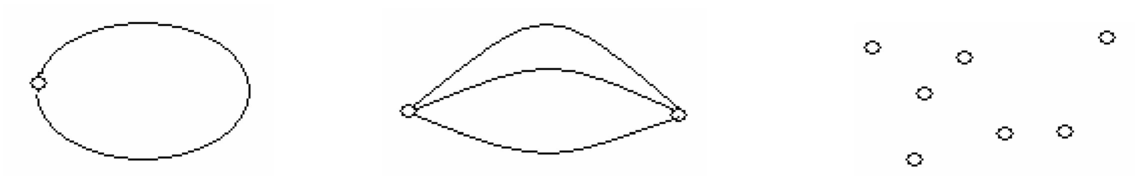
Рис. 5.2.

Визначення 5.4. Ребро, що з'єднує деяку вершину саму з собою, називається ***петлею*** (рис. 5.3,а).

Визначення 5.5. Ребра, інцидентні до однієї й тієї ж пари вершин, називаються ***кратними*** (***паралельними***) (рис. 5.3,б). Граф, що містить кратні ребра, називається ***мультиграфом***, а граф, що містить кратні ребра і петлі – ***псевдографом***.

Визначення 5.6. Граф називається ***скінченним***, якщо множини його вершин і ребер скінченні.

Множина ребер графа може бути порожньою (рис. 5.3,в). Такий граф називається ***порожнім*** (***пустим***).



а б в

Рис. 5.3.

Визначення 5.7. Граф без петель і кратних ребер називається ***повним***, якщо кожна пара його вершин з'єднана ребром. Повний граф з n вершинами позначається K_n.

Приклад 5.2. На рис. 5.4 зображені повні графи K_2, K_3, K_4, K_5 і K_6 відповідно:

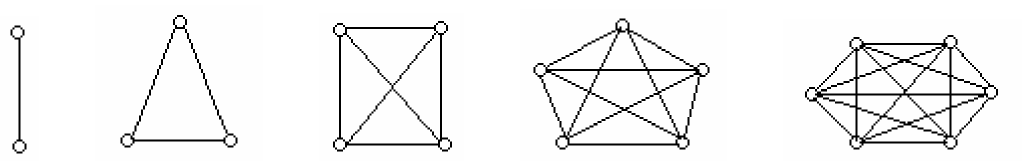
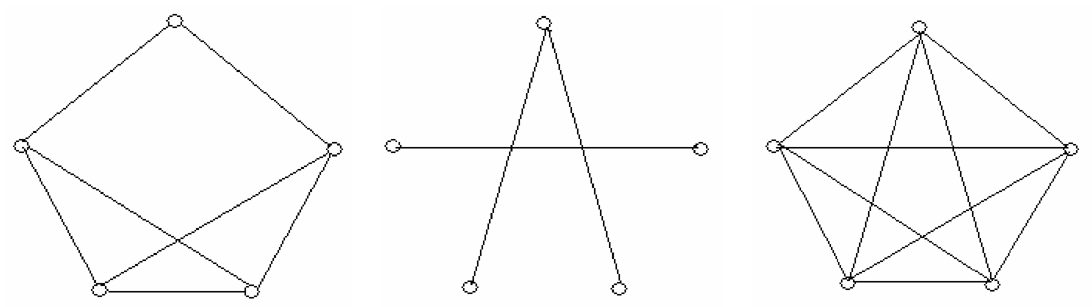


Рис. 5.4.

Визначення 5.8. ***Доповненням графа*** G називається граф $\overline{G}$, що має ті ж вершини, що і граф G, і тільки ті ребра, які необхідно додати до графа G, щоб він став повним.

Приклад 5.3. Доповненням графа G, зображеного на рис. 5.5,а є граф $\overline{G}$, зображений на рис. 5.5,б. Для порівняння, повний граф зображений на рис. 5.5,в.



(а) (б) (в)

Рис. 5.5.

Визначення 5.9. ***Степенем вершини*** v $(\deg v)$ називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Петля дає внесок в 2 одиниці у степінь вершини. Вершина степеня 0 називається ***ізольованою***. Вершина степеня 1 називається ***висячою***.

Теорема 5.1. Сума степенів усіх вершин графа завжди парна і дорівнює подвоєному числу ребер: $\sum\limits_{v \in G} \deg v = 2m$, де m - кількість ребер графа.

Доведення. Оскільки кожне ребро графа має два кінці, степінь кожного кінця збільшується на 1 за рахунок одного ребра. Тобто в суму степенів усіх вершин кожне ребро вносить 2 одиниці. Отже сума степенів вершин повинна у два рази перевищувати число ребер, тобто бути парною.

Теорема 5.2. У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, є непарне число вершин непарного степеня. Сума вершин парного степеня – парна. Сума степенів усіх вершин графа є сума степенів вершин обох типів. Така сума є число непарне. Тобто, сума степенів всіх вершин графа буде непарною. Це суперечить теоремі 5.1.

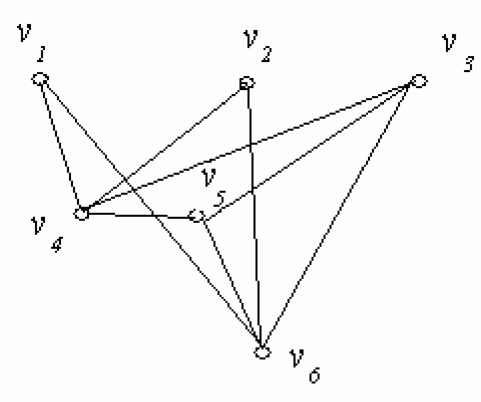


Рис. 5.6.

Приклад 5.4. Знайти степені вершин графа, зображеного на рис. 5.6.

Розв'язання. $\deg v_1 = 2$; $\deg v_2 = 2$; $\deg v_3 = 3$; $\deg v_4 = 4$; $\deg v_5 = 3$; $\deg v_6 = 4$;

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m.$$

У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3 і v_5.

Визначення 5.10. Для орієнтованого графа визначаються два степеня вершин: ***півстепінь виходу*** $\deg v'$ - кількість ребер, які виходять з вершини v, і ***півстепінь входу*** $\deg v''$ - кількість ребер, які входять у вершину v. Петля дає внесок по 1 в обидва степеня.

В орграфі суми півстепенів усіх вершин $\deg v'$ і $\deg v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum_{v \in G} \deg v' = \sum_{v \in G} \deg v'' = m$.

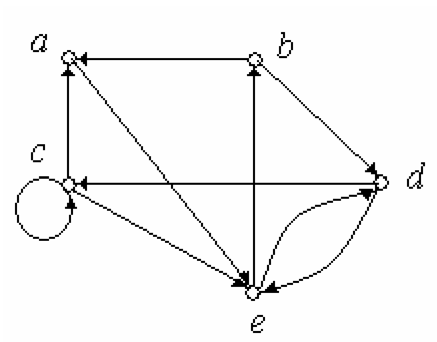


Рис. 5.7.

Приклад 5.5. Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рис. 5.7.

Розв'язання. $\deg a' = 1$, $\deg b' = 2$; $\deg c' = 3$; $\deg d' = 2$; $\deg e' = 2$; $\deg a'' = 2$, $\deg b'' = 1$; $\deg c'' = 2$; $\deg d'' = 2$; $\deg e'' = 3$;

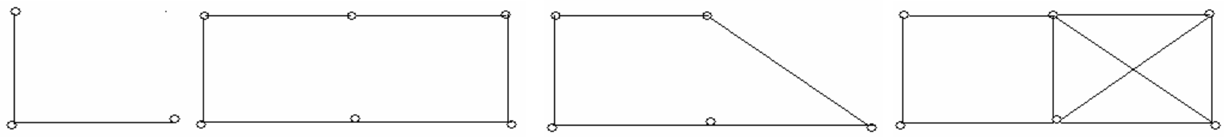
$$\sum_{v \in G} \deg v' = 1+2+3+2+2 = 10 =$$

$$= \sum_{v \in G} \deg v'' = 2+1+2+2+3 = 10 = m.$$

Визначення 5.11. Граф G' називається ***підграфом*** графа G, якщо кожна вершина і кожне ребро графа G' є відповідно вершиною і ребром графа G.

Визначення 5.12 Підграф G' називається ***остовом*** (***каркасом***) графа G, якщо містить всі його вершини.

Приклад 5.6. На рис. 5.8 а, б, в подані підграфи графа, зображеного на рис. 5.8,г. Причому підграф на рис. 5.8,б є його каркасом.



а б в г

Рис. 5.8.

Один і той же граф можна зображати по-різному. Різним чином можна розташовувати вершини на площині. Ребра можна зображати не тільки відрізками прямих (різної довжини), але й довільними дугами. Тому порівнюючи графи, будемо спиратися на наступні визначення.

Визначення 5.13. Графи G_1 і G_2 ***рівні***, якщо множини їхніх вершин і ребер, визначених через пари інцидентних їм вершин, збігаються.

Наприклад, графи, зображені на рис. 5.1, рівні.

Задати граф – означає описати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G - скінченний, для його опису досить занумерувати вершини і ребра та задати відношення інцидентності.

Визначення 5.14. Граф G називається ***повністю заданим*** у точному значенні, якщо нумерація його вершин і ребер зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією, називаються ***ізоморфними***.

Наведемо ще одне визначення ізоморфних графів.

Визначення 5.15. Графи G_1 і G_2 ***ізоморфні***, якщо їхні вершини можна пронумерувати таким чином, що ребро e_j тоді й тільки тоді з'єднує вершини v_i і v_k у графі G_1, коли ребро e'_j з'єднує вершини v'_i і v'_k у графі G_2.

Приклад 5.7. Графи, зображені на рис. 5.9, а, б, ізоморфні.

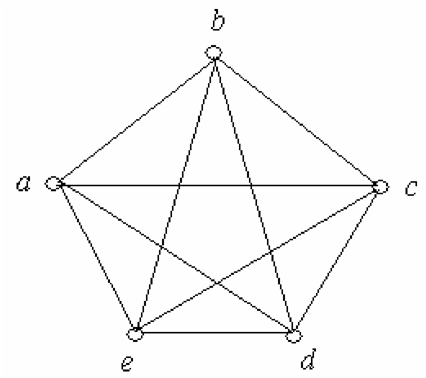


Рис. 5.9. а

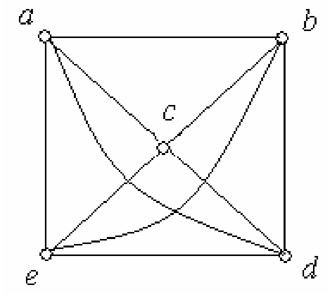
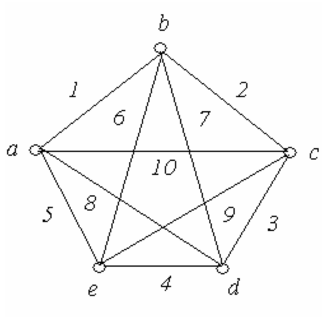
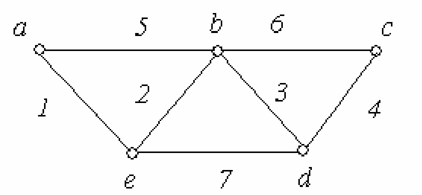


Рис. 5.9. б

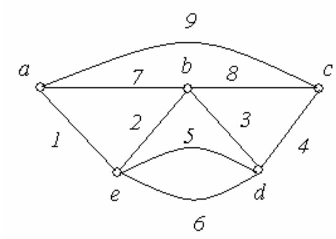
Приклад 5.8. На рис. 5.10 зображені графи G_1 - G_{13} з п'ятьма вершинами в кожному. Порівняти ці графи.



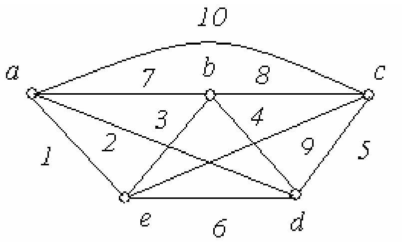
G_1



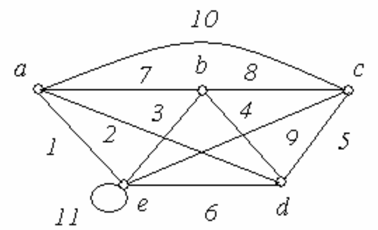
G_2



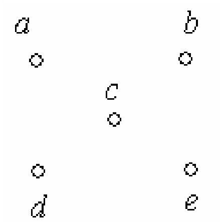
G_3



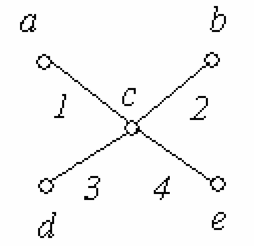
G_4



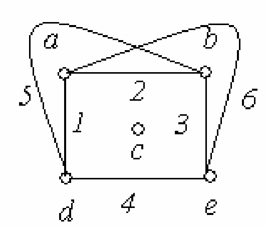
G_5



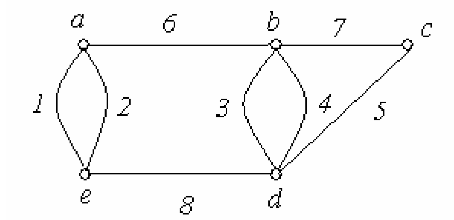
G_6



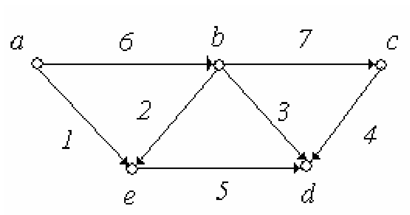
G_7



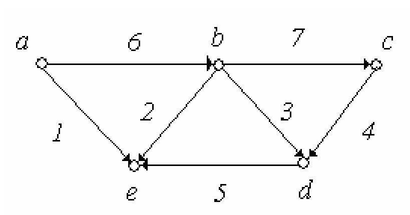
G_8



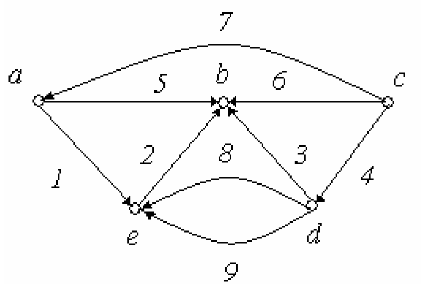
G_9



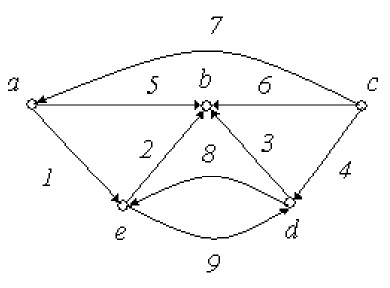
G_{10}



G_{11}



G_{12}



G_{13}

Рис. 5.10.

Розв'язання. Графи G_1 - G_9 - неорієнтовані, а G_{10} - G_{13} - орієнтовані.

Графи G_1 і G_4 - повні, причому $G_1 = G_4$.

Граф G_5 не є повним, незважаючи на те, що кожна пара вершин з'єднана ребром, оскільки є петля. G_5 - псевдограф.

G_3 і G_9 є мультиграфами, тому що містять кратні ребра.

Граф G_6 - порожній, оскільки має порожню множину ребер. Усі вершини графа є ізольованими.

Графи G_7 і G_8 є доповненням один до одного.

Графи G_{10} і G_{11} не є рівними, оскільки ребра 5 мають різний напрямок.

Граф G_{12} - орієнтований мультиграф, тому що має кратні ребра, у той час як граф G_{13} не є мультиграфом, тому що ребра 8 і 9 по-різному напрямлені.

6.2. Способи задання графів

Для задання графа необхідно занумерувати вершини й ребра, а також задати відношення інцидентності. Відношення інцидентності будемо описувати трьома способами: ***матрицею інцидентності***, ***матрицею суміжності***, ***списком ребер*** графа. Розглянемо докладно кожний з перелічених способів.

Матриця інцидентності $A = \left\| \varepsilon_{ij} \right\|$ – це матриця розміром $n \times m$, де вертикально вказуються вершини $i = \overline{1,n}$, а горизонтально – ребра $j = \overline{1,m}$. На перетині i-го рядка та j-го стовпця стоїть елемент ε_{ij} – число, яке визначається рівністю:

а) у випадку неорієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро } e_i \text{ інцидентно вершині } v_j; \\ 0, \text{ якщо ребро } e_i \text{ не інцидентно вершині } v_j; \\ \alpha, \text{ якщо ребро } e_i - \text{ петля} (\alpha \neq 0 \text{ і } \alpha \neq 1). \end{cases}$$

б) у випадку орієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ якщо } v_i - \text{початок ребра } e_j; \\ 1, \text{якщо } v_i - \text{кінець ребра } e_j; \\ 0, \text{ якщо вони не інцидентні;} \\ \alpha, \text{ якщо } e_j - \text{петля, а } v_i - \text{інцидентна їй вершина.} \end{cases}$$

Тут $\alpha \neq 0, 1, -1$, наприклад, $\alpha = 2$.

Матриця суміжності $M = \left\| \delta_{ij} \right\|$ - це квадратна матриця розміром $n \times n$, де вертикально й горизонтально вказують вершини графа $i = \overline{1,n}$ і $j = \overline{1,n}$. На перетині i-го рядка та j-го стовпця стоїть елемент ε_{ij} – число, яке дорівнює:

а) числу ребер, що з'єднують ці вершини, - у випадку неорієнтованого графа;

б) числу ребер з початком в i-й вершині і кінцем в j-й вершині - у випадку орієнтованого графа.

Список ребер графа – це таблиця, що складається з трьох рядків. У першому перераховані всі ребра; у другому і третьому – інцидентні їм вершини:

а) у випадку неорієнтованого графа порядок вершин у стовпці довільний;

б) у випадку орієнтованого графа першою записується вершина, де починається ребро (другий рядок); а вершина, де закінчується ребро, записується у третій рядок.

Для нумерації вершин і ребер графа використовують різний символьний запис: римські чи арабські цифри, латинські букви і т.п.

Якщо графи рівні, то їх матриці суміжності й інцидентності, а також список ребер, однакові.

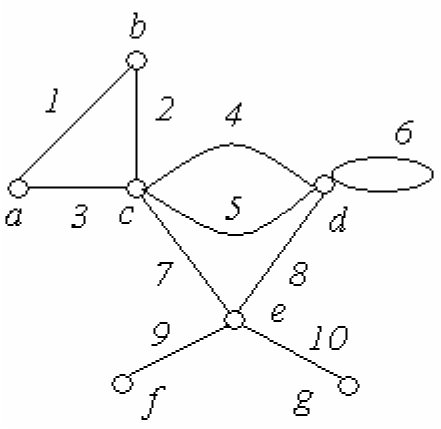


Рис. 5.13.

Приклад 5.9. Задати матрицями інцидентності й суміжності, а також списком ребер неорієнтований граф, зображений на рис. 5.13.

Розв'язання.

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Тут $\alpha = 2$.

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	a	b	a	c	c	d	c	d	e	e
	кінець	b	c	c	d	d	d	e	e	f	g

Як бачимо, в кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом задання графів.

Кожний з поданих способів однозначно описує граф, зображений на рис. 5.13.

Приклад 5.10. Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтований граф, зображений на рис. 5.14.

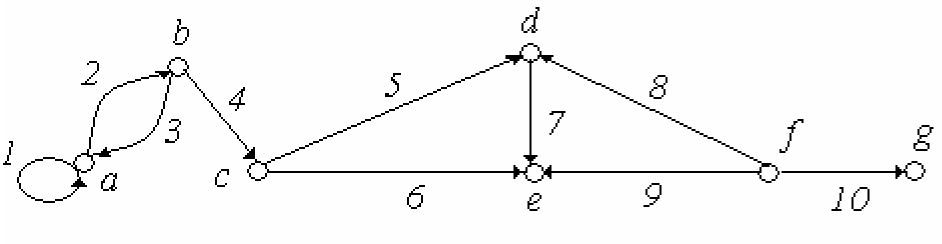


Рис. 5.14.

Розв'язання. Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	−1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	−1	−1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	−1	−1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	−1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*d*	*f*	*f*	*f*
	кінець	*a*	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*	*e*	*d*	*e*	*g*

Відмінність матриці інцидентності орієнтованого графа від неорієнтованого полягає в зазначенні початку і кінця ребер. Матриця суміжності орграфа втрачає свою симетричність. У списку ребер важливий порядок запису вершин, що з'єднуються зазначеним ребром, – від початку до кінця.

Як сказано вище, всі розглянуті способи задання однозначно визначають граф. Виникає запитання: *як відновити граф* за заданими матрицями інцидентності чи суміжності або списку ребер?

За *матрицею інцидентності* A число ребер і вершин визначається з її розміру: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ - числу рядків n матриці.

За *матрицею суміжності* M число вершин визначається з її розміру. Як було сказано, матриця суміжності н-графа симетрична щодо головної діагоналі, і кількість ребер визначається верхнім правим трикутником матриці, розташованим над головною діагоналлю, включаючи останню. Тобто число ребер н-графа дорівнює сумі елементів, розташованих у цьому трикутнику, включаючи головну діагональ. У матриці суміжності орграфа симетрія відсутня, а число ребер дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

Список ребер є скороченим варіантом запису матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

Матриця інцидентності й список ребер, по суті, еквівалентні. Тобто знаючи матрицю інцидентності, можна записати список ребер, і навпаки.

Побудова матриці інцидентності за списком ребер. Кожен стовпець списку ребер відповідає стовпцю в матриці інцидентності з тим же номером. Для неорієнтованого графа в кожному стовпці списку ребер вказані номери елементів матриці інцидентності, рівні 1 (всі інші елементи – нулі). Для орієнтованого графа першою вказується вершина, що відповідає початку ребра (у матриці інцидентності – елемент -1), а другий – відповідному кінцю ребра (у матриці інцидентності – елемент 1). При збігу елементів у стовпці списку ребер, у відповідному рядку матриці інцидентності записується число, відмінне від -1, 0, 1, наприклад, 2. Така ситуація відповідає наявності в графі петель.

<u>Приклад 5.11</u>. Побудувати матрицю інцидентності неорієнтованого графа за списком ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	a	d	e	c	a	d	b	f
	кінець	d	f	f	e	b	c	f	f

Розв’язання.

Матриця інцидентності відповідно до списку ребер має вигляд

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	1	0	1	0
c	0	0	0	1	0	1	0	0
d	1	1	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	0	0
f	0	1	1	0	0	0	1	2

5.3. Зв’язність графа. Маршрути, шляхи, ланцюги, цикли

5.3.1. G -неорієнтований граф

<u>Визначення 5.16</u>. ***Маршрутом*** у графі G називається така послідовність ребер $M(e_1, e_2, ..., e_n)$, в якій кожні два сусідніх ребра e_{i-1} і e_i мають спільну вершину. У маршруті одне й те саме ребро може зустрічатися кілька разів. Іншими словами, ***маршрут*** – це сукупність ребер, з’єднаних вершинами так, що можна рухатися по них уздовж графа.

Визначення 5.17. ***Початок маршруту*** – це вершина v_0, інцидентна ребру e_1 і не інцидентна ребру e_2. ***Кінець маршруту*** – це вершина v_n інцидентна ребру e_n і не інцидентна e_{n-1}. Якщо ребра e_1, e_2 (e_{n-1} ,e_n) - кратні, то необхідно додатково вказувати, яку з двох інцидентних вершин вважати початком (кінцем) маршруту. Всі інші вершини маршруту $v_1, v_2,...,v_{n-1}$ називаються ***внутрішніми***.

Визначення 5.18. ***Маршрут довжини*** k - послідовність, що містить k ребер. Іншими словами, ***довжиною маршруту*** називається кількість ребер у ньому; при цьому кожне ребро враховується стільки разів, скільки воно зустрічається в маршруті.

Маршрут з v_0 у v_n можна розглядати як послідовність вершин $v_0, v_1, v_2,...,v_{n-1}, v_n$, в якій довільна пара сусідніх вершин v_{i-1}, v_i з’єднана ребром e_i, що їм інцидентне. Позначення маршруту з v_0 у v_n послідовністю вершин і ребер $v_0e_1v_1e_2v_2....v_{n-1}e_nv_n$ надлишкове, тому ми будемо позначати цей маршрут як $v_0v_1v_2....v_{n-1}v_n$.

Визначення 5.19. Маршрут, всі ребра якого різні, називається ***ланцюгом***. Ланцюг без самоперетину, тобто який не має внутрішніх вершин, що повторюються, називається ***простим***.

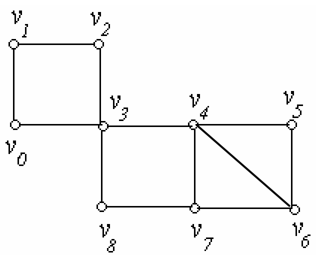


Рис. 5.17

Приклад 5.13. Навести деякі можливі маршрути довжини 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 з вершини v_0 в v_8 у графі, зображеному на рис. 5.17.

Розв’язання. З вершини v_0 у v_8 ведуть, наприклад, маршрути:

1) $v_0v_3v_8$ - довжини 2; 2) маршруту довжини 3 не існує;

3) $v_0v_1v_2v_3v_8$ - довжини 4; 4) $v_0v_3v_4v_7v_8$ - довжини 4;

5) $v_0v_3v_4v_6v_7v_8$ - довжини 5; 6) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 6;

7) $v_0v_3v_4v_5v_4v_7v_8$ - довжини 6; 8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ - довжини 6;

9) $v_0v_3v_4v_6v_5v_4v_7v_8$ - довжини 7; 10) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 8;

11) $v_0v_1v_2v_3v_4v_6v_5v_4v_3v_8$ - довжини 9; 12) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ - довжини 10.

Маршрути 1), 3), 4), 5), 6), 8), 10) є простими ланцюгами. Маршрут 9) є ланцюгом, але не простим. Маршрути 7), 11) і 12) не є ланцюгами.

Визначення 5.20. Маршрут, в якому збігаються початок і кінець - v_0 і v_n - називається ***циклічним*** (***замкненим***). Циклічний маршрут називається ***циклом***, якщо він є ланцюг, і ***простим циклом*** – якщо це простий ланцюг.

Наприклад, для графа, зображеного на рис. 5.17, маршрут $v_0v_1v_2v_3v_0$ є простим циклом; маршрут $v_3v_4v_6v_5v_4v_7v_8v_3$ є циклом, але не простим, оскільки містить внутрішні вершини, що повторюються; маршрут $v_3v_4v_5v_6v_7v_4v_3$ – циклічний, але не є циклом, оскільки містить ребра, що повторюються.

Визначення 5.21. Вершини v' і v'' графа G називаються ***зв'язаними***, якщо існує маршрут з початком у v' і кінцем у v''.

Кожна вершина вважається зв'язаною сама з собою.

Визначення 5.22. Граф G називається ***зв'язним***, якщо будь-які пари його вершин зв'язані між собою.

Приклад 5.14. Граф, зображений на рис. 5.18,а – незв'язний, а граф на рис. 5.18,б – зв'язний.

а б

Рис. 5.18

Теорема 5.3. Якщо існує маршрут з вершини v' у v'' графа G, то існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини v' і v''.

Наслідок. Граф G є зв'язним тоді й тільки тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий ланцюг.

Визначення 5.23. Максимальний непустий зв'язний підграф G' графа G називається ***компонентом*** графа G.

Отже кожен граф можна подати як об'єднання компонент, які попарно не перетинаються.

Незв'язний граф має як мінімум два компоненти. Наприклад, граф, зображений на рис. 5.18,а, має два компоненти: v_1v_2 і $v_3v_4v_5$.

При ***видалені ребра*** з графа G його кінці залишаються в графі. Операція ***видалення вершини*** v графа G полягає у викиданні цієї вершини разом з інцидентними їй ребрами.

Визначення 5.24. Вершина v називається ***точкою зчленування***, якщо видалення її з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Визначення 5.25. Ребро e називається ***мостом***, якщо видалення його з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Наприклад, у графі, зображеному на рис. 5.18,б, вершини v_2 і v_3 - точки членування, а ребра v_1v_2 і v_2v_3, що з'єднують відповідні пари вершин, - мости. У графі на рис. 5.17 вершина v_3 є точкою зчленування, а мостів цей граф не має.

5.3.2. G - орієнтований граф

Визначення 5.26. Послідовність дуг (напрямлених ребер) $M(e_1, e_2, ..., e_n)$, в якій кінець кожного попереднього ребра e_{i-1} збігається з початком наступного e_i, називається ***шляхом*** (***орієнтованим маршрутом*** або ***ормаршрутом***). У шляху та сама дуга може зустрічатися кілька разів.

Визначення 5.27. ***Початком*** шляху $M(e_1, e_2, ..., e_n)$ є початкова вершина v_0 ребра e_1, а ***кінцем*** шляху – кінцева вершина v_n ребра e_n. Інші вершини називаються ***внутрішніми***.

Визначення 5.28. ***Довжиною орієнтованого маршруту*** називається кількість орієнтованих ребер, що входять у цей шлях.

Приклад 5.15. Для графа, зображеного на рис. 5.19, навести деякі можливі орієнтовані маршрути довжини 3, 4, 5, 7 з вершини v_0 у v_6.

Розв'язання. З вершини v_0 у v_6 ведуть, наприклад, ормаршрути:

1) $v_0v_1v_3v_6$; $v_0v_2v_5v_6$; $v_0v_4v_3v_6$ - довжини 3; 2) шляху довжини 4 не існує;

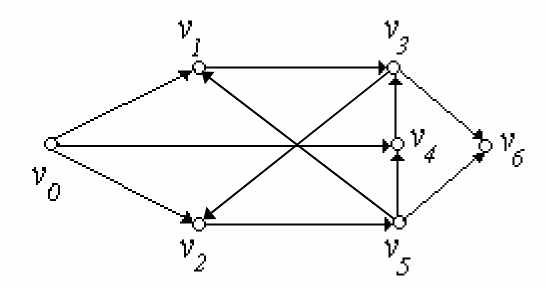


Рис. 5.19

3) $v_0v_2v_5v_4v_3v_6$, $v_0v_2v_5v_1v_3v_6$, $v_0v_1v_3v_2v_5v_6$, $v_0v_4v_3v_2v_5v_6$ - довжини 5;

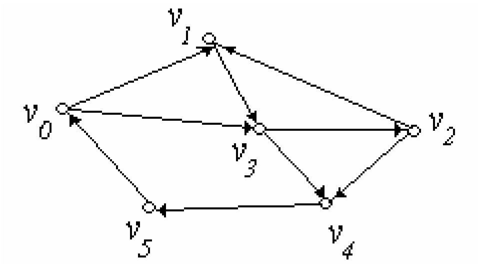
4) $v_0v_1v_3v_2v_5v_1v_3v_6$, $v_0v_4v_3v_2v_5v_4v_3v_6$ - довжини 7.

Визначення 5.29. ***Орієнтованим ланцюгом*** (***орланцюгом***) називається шлях, кожна дуга якого зустрічається не більше одного разу. Орланцюг називається ***простим***, якщо будь-яка його внутрішня вершина інцидентна не більш, ніж двом його ребрам.

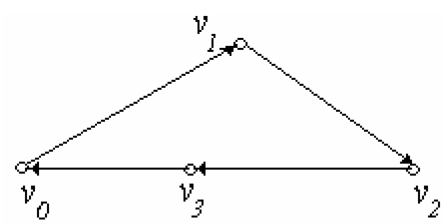
Визначення 5.30. ***Контуром*** називається шлях, початок v_0 і кінець v_n якого збігаються. Контур називається ***орієнтованим циклом*** (***орциклом***), якщо він є ланцюгом, і ***простим орциклом*** – якщо це простий ланцюг.

Зауважимо, що при записі циклу як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графа за початок (він же кінець) може бути обрана будь-яка вершина, наприклад: $v_1v_2v_3v_0v_1$; $v_2v_3v_0v_1v_2$ і т.п.

Приклад 5.16. Для графів, зображених на рис. 5.20,а і 5.20,б, навести деякі можливі орланцюги, контури, орцикли й прості орцикли.



а



б

Рис. 5.20.

Розв'язання.

а) Для графа, зображеного на рис. 5.20,а:

$v_0v_3v_2v_1v_3v_4$ - орланцюг, але не простий, оскільки вершина v_3 зустрічається більше одного разу; $v_0v_1v_3v_2v_4v_5$ - простий орланцюг; $v_0v_1v_3v_2v_1v_3v_4v_5v_0$ - контур, але не орцикл, оскільки дуга v_1v_3 зустрічається більше одного разу;

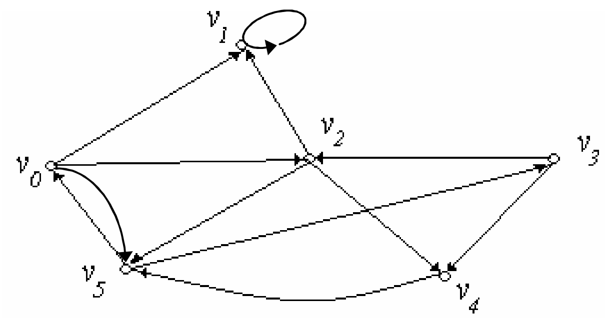
$v_0v_3v_2v_1v_3v_4v_5v_0$ - орцикл, але не простий, оскільки вершина v_3 зустрічається більше одного разу; $v_0v_3v_4v_5v_0$ - простий орцикл.

б) Для графа, зображеного на рис. 5.20,б:

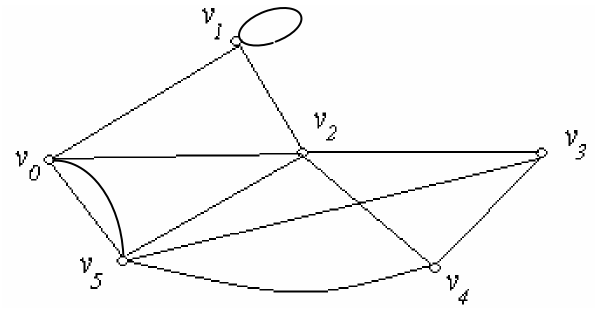
$v_0v_1v_2$ - простий орланцюг; $v_0v_1v_2v_3v_0$ - простий орцикл.

Визначення 5.31. Для кожного орієнтованого графа G може бути побудований неорієнтований граф G^s такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожна дуга G стає неорієнтованим ребром графа G^s. Одержаний неорієнтований граф G^s називається ***співвіднесеним графом*** орієнтованого графа G.

Приклад 5.17. Для орграфа G, зображеного на рис. 5.21,а, співвіднесений граф G^s матиме вигляд, показаний на рис. 5.21,б:



а



б

Рис. 5.21.

У неорієнтованому графі дві вершини зв'язані або ні. В орграфі відповідне відношення несиметричне.

Визначення 5.32. Вершина $v'' \in G$ називається ***досяжною*** з вершини $v' \in G$, якщо існує шлях з початком у v' і кінцем у v''.

Кожна вершина вважається досяжною з самої себе.

Визначення 5.33. Орієнтований граф G називається:

1) ***незв'язним***, якщо його співвіднесений граф G^s є незв'язним;

2) ***слабко зв'язним***, якщо його співвіднесений граф G^s є зв'язним;

3) ***односторонньо зв'язним***, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує шлях з v' у v'' чи, навпаки, з v'' у v';

4) ***сильно зв'язним***, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує шлях з v' у v''.

Сильна зв’язність спричинює односторонню, яка, в свою чергу, тягне слабку. Обернене твердження невірне.

Тривіальний орграф, що складається з однієї вершини, є сильно зв’язним.

Наприклад, 1) орграф, зображений на рис. 5.7, – сильно зв’язний; 2) орграф, зображений на рис. 5.21,а, – односторонньо зв'язний, але не сильно зв'язний, оскільки, зокрема, не існує шляху з початком v_1 і кінцем v_0; 3) орграф, одержаний із поданого на рис. 5.21,а видаленням вершини v_5, – слабко зв’язний, але не односторонньо зв'язний, оскільки, зокрема, не існує жодного шляху з кінцями v_0 і v_3 .

5.4. Метрика на графах

Визначення 5.34. ***Відстанню*** $d(v',v'')$ між вершинами v' і v'' графа G називається мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v' і кінцем у вершині v''. Якщо вершини v' і v'' незв’язані, тобто належать різним компонентам, то вважається, що $d(v',v'')=+\infty$.

У зв'язному графі G відстань між вершинами задовольняє наступним умовам:

1) $\forall v',v''\in G$, $d(v',v'')\geq 0$ і $d(v',v'')=0$ тоді і тільки тоді, коли $v'=v''$;

2) $\forall v',v''\in G$, $d(v',v'')=d(v'',v')$;

3) $\forall v',v'',v'''\in G$, $d(v',v'')\leq d(v',v''')+d(v''',v'')$.

Функція $d(v',v'')$, що задовольняє трьом переліченим умовам, називається ***метрикою графа***.

Визначення 5.35. Вершина графа називається ***центральною***, якщо для неї максимальна з відстаней до інших вершин є мінімальною на графі. Множина всіх центральних вершин графа називається його ***центром***.

Визначення 5.36. Вершина графа називається ***периферійною***, якщо для неї максимальна з відстаней до інших вершин є максимальною на графі.

Визначення 5.37. Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається ***радіусом графа*** $r(G)$.

Визначення 5.38. Найкоротший простий ланцюг, що з'єднує дані дві вершини, називається ***геодезичним***.

Визначення 5.39. ***Відхиленням вершини*** $l(v)$ називається найбільша довжина геодезичної, що з неї виходить.

У зв'язку з цим можна дати ще одне означення радіуса графа:

Визначення 5.40. Відхилення центра називається ***радіусом графа*** $r(G)$, а відхилення периферійної точки – ***діаметром графа*** $D(G)$.

Алгоритм знаходження відстаней від даної вершини v_0 до інших вершин графа G:

1) позначаємо через $A_0 = \{v_0\}$;

2) позначаємо індексом v_0 всі вершини, суміжні з вершиною v_0, виписуємо множину A_1 всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_1 дорівнює 1;

3) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1$ і суміжну з вершинами v', v'', ... множини A_1, позначаємо відповідним індексом $v', v'', \ldots$; виписуємо множину A_2 всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_2 дорівнює 2; ... ;

n) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ і суміжну з вершинами v', v'', ... множини A_{n-1}, позначаємо відповідним індексом $v', v'', \ldots$; виписуємо множину A_n всіх цих вершин з їхніми позначками; відстань до цих вершин A_n дорівнює n; … ;

повторюємо описану процедуру доти, поки множина непозначених вершин не виявиться порожньою.

Приклад 5.18. Визначити відстань від вершини 7 (для зручності запису вершини графа позначені арабськими цифрами) до всіх вершин графа G, зображеного на рис 5.22.

Розв'язання. За наведеним алгоритмом одержуємо:

$$1)\ A_0 = \{7\};\ 2)\ A_1 = \{1_7, 3_7, 6_7\};\ 3)\ A_2 = \{2_{1,3}, 5_{3,6}, 4_3\}.$$

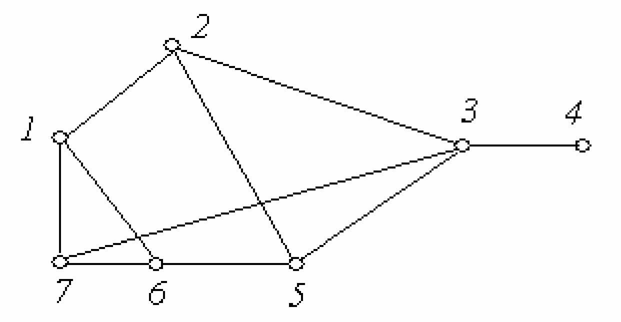


Рис. 5.22

Більше непозначених вершин немає. Тобто відстані від вершини 7 до кожної з вершин графа такі:

$$d(7,1)=d(7,3)=d(7,6)=1;$$

$$d(7,2)=d(7,4)=d(7,5)=2.$$

Для визначення центра, радіуса і діаметра графа необхідно побудувати для нього ***матрицю відстаней*** A, кожен елемент якої a_{ij} описує відстань між вершинами i та j графа G, тобто $a_{ij}=d(v_i,v_j)$. Очевидно, що матриця відстаней A симетрична щодо головної діагоналі, елементи якої дорівнюють нулю, оскільки $d(v_i,v_i)=0$.

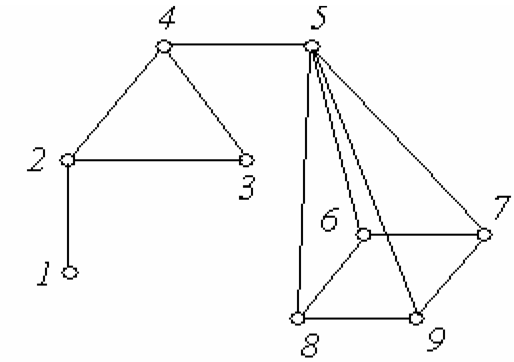


Рис. 5.23

Приклад 5.19. Визначити центр, периферійні вершини, радіус і діаметр графа G, зображеного на рис. 5.23.

Розв'язання. Матриця відстаней графа G має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	2	3	4	4	4	4
2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
3	1	1	0	1	2	3	3	3	3
4	2	1	1	0	1	2	2	2	2
5	3	2	2	1	0	1	1	1	1
6	4	3	3	2	1	0	1	1	2
7	4	3	3	2	1	1	0	1	1
8	4	3	3	2	1	1	1	0	1
9	4	3	3	2	1	2	1	1	0

Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа $l(v_i)$ як $\max\limits_{1\le j\le 9} a_{ij}$:

$l(1)=4$; $l(2)=3$; $l(3)=3$; $l(4)=2$; $l(5)=3$; $l(6)=4$; $l(7)=4$; $l(8)=4$; $l(9)=4$.

Отже згідно з означенням 6.36, центр графа складається з однієї вершини 4; периферійні вершини – 1, 6, 7, 8, 9. Радіус графа $r(G)=2$, а його діаметр $D(G)=4$.

6. КОМБІНАТОРИКА

Поняття й правила ***комбінаторики*** широко використовуються в багатьох математичних і суміжних дисциплінах. Її центральною задачею є розміщення об’єктів деякої скінченної множини відповідно до спеціальних правил та обчислення кількості способів, якими це можна зробити. При цьому розглядаються різні ***комбінації*** – вибірки з елементів скінченної множини M. Наприклад, якщо взяти 10 різних цифр 0, 1, 2, ... , 9 і утворювати з них комбінації, то будемо одержувати різні числа, наприклад 345, 534, 1036, 5472, 45, 54 і т.п.

Видно, що деякі з таких комбінацій відрізняються тільки порядком цифр (наприклад, 345 і 534), інші – цифрами, що в них входять (наприклад, 1036 і 5472), треті – розрізняються порядком і кількістю цифр (наприклад, 345 і 54).

Отримані комбінації задовольняють різним умовам. Залежно від правил їх утворення можна виділити три типи комбінацій: ***перестановки, розміщення, сполучення***. Далі розглянемо їх окремо.

При розв’язуванні комбінаторних задач використовують наступні два аксіоматичні правила.

<u>Правило суми</u>. Якщо об’єкт a можна вибрати k способами, а об’єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір об’єкта “a або b” може бути здійснений $k+m$ способами.

Тут зв’язка *або* вживається в розділовому смислі.

<u>Приклад 6.1</u>. У місті N знаходяться $k=6$ технічних ВНЗ, $m=2$ медичних і $n=3$ гуманітарних. Скількома способами S можна отримати вищу освіту

за державним набором у цьому місті?

Розв'язання. Оскільки державний набір передбачає безоплатну освіту тільки в одному ВНЗ, то можна застосувати правило суми. Згідно з цим правилом число способів $S = k + m + n = 6 + 3 + 2 = 11$.

Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати k способами, а після кожного з цих виборів об'єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір упорядкованої пари (a, b) може бути здійснений $k \times m$ способами.

Приклад 6.2. На групу з $k = 24$ студентів видається $m = 30$ тем рефератів і $n = 10$ тем курсових робіт по одному завданню кожного виду на одного студента. Скількома способами S це можна зробити?

Розв'язання. Оскільки кожний студент повинен підготувати тільки один реферат і виконати тільки одну курсову роботу, то можна застосувати правило добутку. За цим правилом $S = k \times m \times n = 24 \times 30 \times 10 = 7200$.

6.1. Перестановки

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна фіксована множина з n елементів.

Визначення 6.1. Комбінації з n елементів, які відрізняються один від одного тільки порядком елементів, називаються ***перестановками***.

Кількість таких перестановок позначають символом P_n, де n – число елементів, що входять у кожну перестановку.

Приклад 6.3. Нехай множина *M* містить три букви *A, B, C*. Скласти всі можливі комбінації із цих букв по три в кожній без повторення.

Розв'язання. Одержимо: *ABC, ACB, BCA, CAB, CBA, BAC* (6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються один від одного тільки порядком розташування букв. Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, але $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$. Прийшли до поняття факторіала.

Визначення 6.2. Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n-***факторіалом*** і пишуть: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Вважають, що $0! = 1$ і $1! = 1$.

Основна властивість факторіала: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Отже число перестановок обчислюють за формулою $P_n = n!$.

6.2. Розміщення

Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – деяка скінченна фіксована множина з n елементів.

Визначення 6.3. Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються один від одного самими елементами або порядком елементів, називаються ***розміщеннями***.

Тут зв’язка *або* вживається в об’єднуючому смислі.

Кількість таких розміщень позначаються символом A_n^m, де n – число всіх наявних елементів, m – число елементів у кожній комбінації. Число розміщень можна обчислити за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1), \quad \text{де} \quad n \geq m \geq 0; \quad m, n \in N.$$

Вважають, що $A_n^0 = 1$.

Приклад 6.4. Нехай множина *M* містить чотири букви *A, B, C, D*. Скласти всі комбінації тільки із двох букв без повторення.

Розв’язання. Одержимо: *AB, AC, AD, BA, BP, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC*. Видно, що всі отримані комбінації (їх 12) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації *BA* і *AB* вважаються різними).

За наведеною формулою $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, що збігається з результатом останнього прикладу. При утворенні розміщень перший елемент може бути обраний $n = 4$ способами, оскільки існує можливість незалежного вибору з усіх наявних $n = 4$ елементів; а другий – $n - 1 = 3$ способами, оскільки тепер вибір проводиться з решти $n - 1 = 3$ елементів, що залишилися. За правилом добутку маємо всього $4 \cdot 3 = 12$ різних комбінацій.

Формулу для A_n^m можна записати у факторіальному вигляді

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Основні властивості розміщень: $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; $A_n^n = P_n = n!$.

Розміщення й перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

6.3. Сполучення

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна фіксована множина з n елементів.

Визначення 6.4. ***Сполученнями*** називаються комбінації з n елементів по m, які відрізняються один від одного принаймні одним елементом ($m, n \in N$ і $n \geq m$), при цьому порядок елементів не враховується.

З кожного сполучення з m елементами можна утворити P_m упорядкованих розміщень. Тому кількість сполучень із n елементів по m C_n^m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, поділеному на число перестановок з m елементів: $C_n^m = A_n^m / P_m$. Вважають, що $C_n^0 = 1$.

Використовуючи для кількості розміщень і перестановок факторіальні співвідношення $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ і $P_n = n!$, одержимо формулу числа сполучень у вигляді

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}.$$

Основні властивості сполучень: $C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$; $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 6.5. Множина *M* утворена з чотирьох букв *A, B, C, D*. Скласти невпорядковані комбінації з двох букв, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

Розв'язання. Маємо: *AB, AC, AD, BP, BD, CD*. Виходить, що число сполучень з 4 елементів по двоє дорівнює 6. Це коротко записується так: $C_4^2 = 6$.

6.4. Розміщення з повтореннями

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна фіксована множина з n типів елементів, причому елементів кожного типу не менше, ніж m екземплярів. Розміщення з n елементів по m зображують упорядковані комбінації елементів різних типів множини M, $|M| = n$. Часто доводиться робити впорядковані комбінації з повтореннями деяких елементів. Наприклад, з множини *M = {A, Б}* можна зробити вісім комбінацій з трьох елементів: *AAA, AAБ, AБA, БAA, БAБ, ББA, AББ, БББ.* Тут $n = 2$, $k = 3$. Такі упорядковані m-комбінації називають *кортежами* (*векторами*, *словами*) довжини m. Два кортежі вважаються *рівними* (не розрізняються), якщо вони мають однакову довжину і на місцях з однаковими номерами стоять однакові елементи.

Визначення 6.5. ***Розміщенням з повтореннями*** (***з поверненнями***) з n елементів по m називається кортеж довжини m з n елементів.

Кількість таких розміщень обчислюють за формулою $\overline{A_n^m} = n^m$.

Розглянутий вище приклад розв’язується за цією формулою $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$.

Дійсно, після заповнення першого місця кортежу довжиною m одним з n елементів (що можливо зробити n варіантами) заповнити друге місце кортежу можна знову будь-яким елементом з усієї множини (повторюючи в одному з варіантів елемент, який знаходиться на першому місці), і так далі m разів. За правилом добутку одержимо, що $\overline{A_n^m} = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^m$.

Приклад 6.6. На диску секретного замка 4 букви. Скільки може бути варіантів S секретного коду з 5 букв?

Розв’язання. Для коду важливий порядок букв, при цьому вони можуть повторюватися. Отже маємо розміщення з повтореннями. Тоді

$$n = 4; \quad m = 5; \quad S = \overline{A_4^5} = 4^5 = 1024.$$

6.5. Сполучення з повтореннями

Нехай $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна фіксована множина з n типів елементів, причому елементів кожного типу не менше, ніж m екземплярів.

Визначення 6.6. ***Сполученням з повтореннями*** (***з поверненнями***) з n елементів по m називається невпорядкована вибірка, що складається з m елементів, взятих з початкової множини M, причому кожний елемент може вибиратися довільне число $0, 1, 2, ..., m-1, m$ раз.

Кількість таких сполучень обчислюють за формулою $\overline{C_n^m}=C_{n+m-1}^m$.

Приклад 6.7. Для чергування в гуртожитку треба виділити групу з 4 студентів з 6 факультетів. Скількома способами S можна сформувати склад цієї групи, враховуючи належність студентів факультетам?

Розв'язання. Від кожного факультету в групу може входити від 0 до 4 студентів. Усі члени групи рівноцінні, тобто порядок неважливий. Отже маємо сполучення з повтореннями. Тоді

$$n=6;\quad m=4;\quad S=\overline{C_6^4}=C_{6+4-1}^4=C_9^4=\frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126.$$

Приклад 6.8. Розв'язати рівняння $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ):

$$\begin{cases} x+8\ge x+3\ge 0 \\ x+6\ge 3\ge 0 \\ x\in\{1,2,3,...\} \end{cases};\quad \begin{cases} x\ge -3 \\ x\ge -3 \\ x\in\{1,2,3,...\} \end{cases};\quad x\in\{1,2,3,...\}.$$

За факторіальними формулами виразимо C_{x+8}^{x+3} і A_{x+6}^3:

$$C_{x+8}^{x+3}=\frac{(x+8)!}{\big((x+8)-(x+3)\big)!\cdot(x+3)!}=\frac{(x+8)!}{5!\cdot(x+3)!}=$$

$$=\frac{1}{120}(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4);$$

$$A_{x+6}^3=\frac{(x+6)!}{\big((x+6)-3\big)!}=\frac{(x+6)!}{(x+3)!}=(x+6)(x+5)(x+4).$$

Підставимо отримані співвідношення у рівняння:

$$\frac{1}{120}(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4)=5(x+6)(x+5)(x+4);$$

$$(x+6)(x+5)(x+4)\left[(x+8)(x+7)-600\right]=0.$$

Тоді

$$x+6=0;\quad x+5=0;\quad x+4=0;\quad (x+8)(x+7)-600=0;$$

$$x_1=-6;\quad x_2=-5;\quad x_3=-4;\quad x^2+15x-544=0;$$

$$x_4=-32;\quad x_5=17.$$

Усі від'ємні значення x відпадають, оскільки не входять в ОДЗ. Отже маємо єдиний корінь $x=17$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 376 с.

2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. - М.: Высш. шк., 1986. – 312 с.

5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. Основи дискретної математики. – К.:Наукова думка, 2002. – 578 с.

6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

7. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д,, Демченко В.В. Дискретна математика. –К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2003. –319 с.

8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. - М.: Логос, 2002. – 238 с.

9. Коваленко Л.Б., Станішевський С.О. Дискретна математика. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 192 с.

Додаток

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання 1. Для кожної з указаних множин знайти її потужність та булеан:

1.1 Задати різними способами множину натуральних чисел, що кратні 3 і не перевищують 35.

1.2 Задати різними способами множину обласних центрів України.

1.3 Задати різними способами множину днів тижня.

1.4 Перелічити елементи множини $\{x | x \quad \text{ціле і } x^3 < 100\}$.

1.5 Перелічити елементи множини $\{x | x - \textit{додатне непарне ціле число } \textit{ і } \ x < 35\}$

1.6 Перелічити елементи множини $\{x \mid x - \textit{улюблені свята Вашої родини}\}$.

1.7 Описати множину $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.8 Описати множину $\{\textit{березень, квітень, травень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.9 Описати множину $\{1, 5, 25, 125, 625, 3125\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.10 Описати множину $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 2.

2.1. $A = \{0, 3, 5, \{6, 9\}\}$, $B = \{2, 3, 9\}$, $C = \{0, 2, 3, 6\}$. Визначити наступні множини: $B - C$, $A \cap B$, $A + C$, $(A \cup B) - C$.

2.2. $A = \{1, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, \{3, 4\}, \{5, 6\}, 8\}$. Визначити наступні множини: $A - B$, $A \cup C$, $A + B$, $(A \cap B) \cup (B - C)$.

2.3. $A = \{2, 3, \{8, 9\}\}$, $B = \{0, \{1, 2\}, 3, 5\}$, $C = \{2, 5, 8\}$. Визначити наступні множини: $A \cup B$, $C - B$, $A + C$, $B + (A \cap C)$.

2.4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap B$, $B \cup C$, $A - C$, $A \cup (B \cap C)$.

2.5. $A = \{1, 2, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap C$, $B - C$, $A + C$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

2.6. $A = [0, 6)$, $B = [1, 7)$, $C = [2, 8]$. Визначити наступні множини: $C - B$, $A + C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{(A \cap B)}$.

2.7. $A = (3, 7)$, $B = (1{,}5]$, $C = [4, 8]$. Визначити наступні множини: $A - B$, $B + C$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

2.8. $A = (5, 8)$, $B = [2, 6)$, $C = (4, 7]$. Визначити наступні множини: $\overline{A \cap C}$, $A - B$, $B \cup C$, $(A \cap B) - \overline{C}$.

2.9. $A = (3, 8)$, $B = [0, 9)$, $C = (2, 5]$. Визначити наступні множини: $A \cap B$, $A + C$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

2.10. $A = [0, 9)$, $B = [2, 5)$, $C = [1, 11]$. Визначити наступні множини: $B \cup C$, $A - C$, $A + B$, $(A \cup B) - C$.

Завдання 3. Для кожної з наведених нижче множин побудувати діаграми Венна, на яких штриховкою показати області, що зображують задані множини:

3.1. $\overline{(A \cap B)}$;

3.2. $\overline{(A \cup B)}$;

3.3. $B - \overline{A}$;

3.4. $(A \cup B) - (A \cap B)$;

3.5. $B - (A \cap B)$;

3.6. $\overline{(A \cap B \cap C)}$;

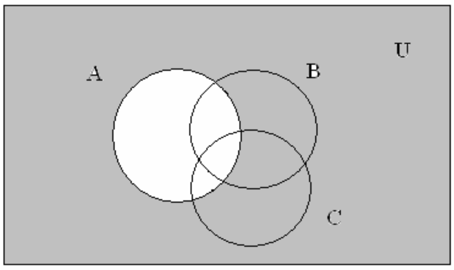
3.7. $A - (B \cap C)$;

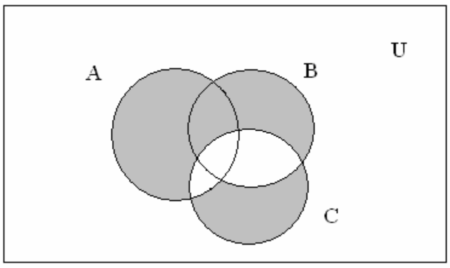
3.8. $(A \cap B) + C$;

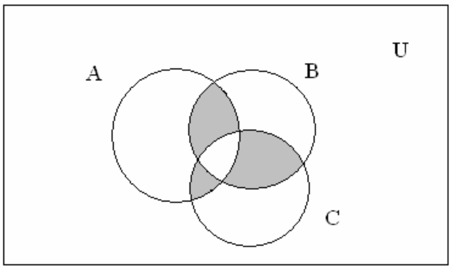
3.9. $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$;

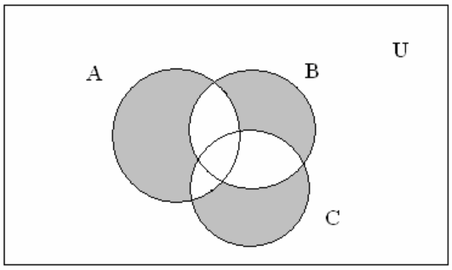
3.10. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

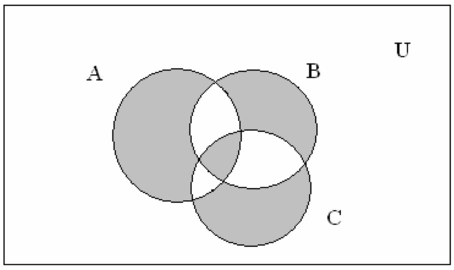
Завдання 4. За допомогою операцій над множинами описати множини, що відповідають зафарбованій частині діаграми Венна (рис. 7.1):

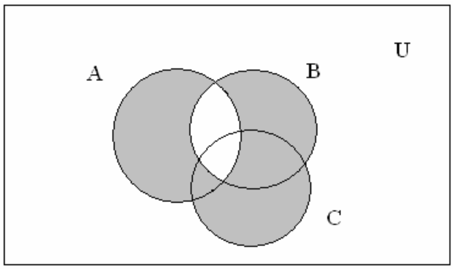
4.1. 

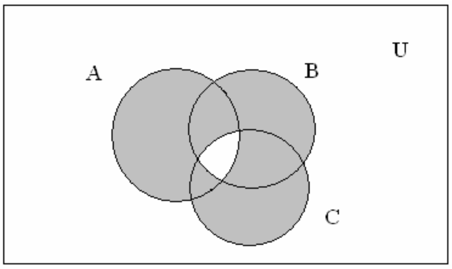
4.2. 

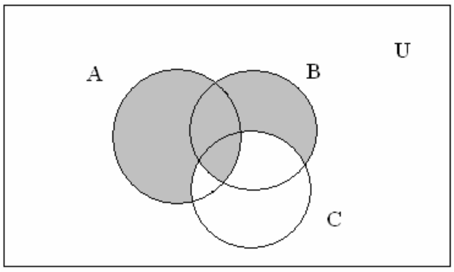
4.3. 

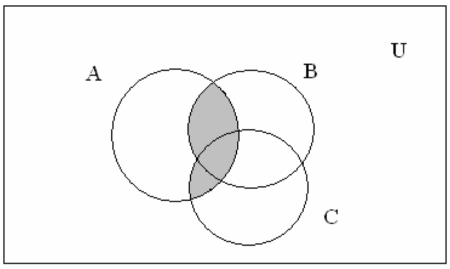
4.4. 

4.5. 

4.6. 

4.7. 

4.8. 

4.9. 

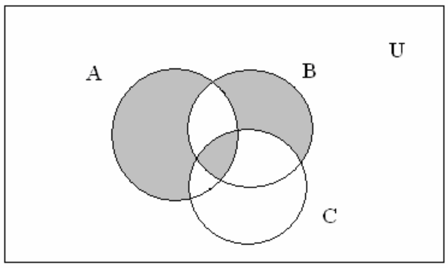
4.10 

Рис. 7.1.

Завдання 5. З'ясувати, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначити властивості функцій. Для взаємно однозначних функцій знайти обернені:

5.1. $f=\{\langle x,y\rangle | y=5x-1,\quad x,y\in R\}.$

5.2. $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| \, x^2/16-y^2/9=1,\quad x\in R, y\in R^+\right\}.$

5.3. $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| x^2+(y-1)^2=9,\quad x,y\in R^+\right\}$.

5.4. $f=\{\langle x,y\rangle | y=\ln x,\quad x\in R^+, y\in R\}$.

5.5. $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| x^2/4+y^2/25=1,\quad x,y\in R^+\right\}$.

5.6. $f=\{\langle x,y\rangle | y=e^x,\quad x\in R, y\in R^+\}$.

5.7. $f=\{\langle x,y\rangle | 4x+5y-20=0,\quad x,y\in R\}$.

5.8. $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| (x-4)^2+y^2=25,\quad x,y\in R^+\right\}$.

5.9. $f=\{\langle x,y\rangle | y=7x-3,\quad x,y\in R\}$.

5.10. $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| x^2/9-y^2/16=1,\quad x,y\in R^+\right\}$.

Завдання 6. Знайти істиннісне значення наступних висловлень:

6.1. $P\to(Q\vee\sim R\leftrightarrow P\wedge R)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.

6.2. $(\sim Q\wedge\sim R\leftrightarrow P)\vee Q$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$.

6.3. $P\wedge R\to\sim((Q\vee\sim P)\leftrightarrow(Q\vee R))$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=1$.

6.4. $Q\to(R\to\sim P\vee R\leftrightarrow Q)$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=1$.

6.5. $(\sim Q\vee\sim R\to Q)\wedge P\leftrightarrow(R\wedge P)$, якщо $P=0$, $Q=0$, $R=0$.

6.6. $P\to\sim(\sim Q\wedge P)\leftrightarrow(R\vee Q\to\sim P)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=1$.

6.7. $\sim(P\wedge R)\to\sim((Q\vee P)\leftrightarrow(Q\vee\sim R))$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.

6.8. $(P\vee\sim R)\to(Q\vee\sim R)\leftrightarrow(P\wedge R)$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$.

6.9. $\sim(Q\wedge\sim R)\leftrightarrow(P\vee Q\to R)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$.

6.10. $(R\to\sim P\vee\sim R\leftrightarrow Q)\to\sim R$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$.

Завдання 7. Скласти таблицю істинності для наступних висловлень:

7.1. $(R\to P)\vee\sim R\to Q\wedge P$.

7.2. $R\leftrightarrow\sim Q\to(P\vee(Q\wedge\sim R))$.

7.3. $Q\vee P\to\sim(Q\wedge P)\leftrightarrow R$.

7.4. $P\to(P\to(Q\leftrightarrow\sim(R\vee P)))$.

7.5. $(Q\vee\sim R)\to(P\wedge Q\leftrightarrow\sim R)$.

7.6. $(P\vee\sim R)\leftrightarrow(P\wedge\sim Q\vee R)$.

7.7. $Q\vee P\to Q\vee\sim(R\wedge P)$.

7.8. $P\to(Q\to(R\to\sim(Q\wedge P)))$.

7.9. $(R\to P)\vee Q\leftrightarrow(R\to Q\wedge P)$.

7.10. $(Q\vee P\to R)\to(\sim Q\wedge P)$.

Завдання 8. Обчислити значення функцій на зазначених наборах:

8.1. $\phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$, $(0,1,0)$.

8.2. $\phi_{13}(\phi_8(x_3, x_1), \phi_1(x_2, x_1))$, $(1,1,0)$.

8.3. $\phi_{11}(\varphi_2(x_3), \phi_7(x_1, x_2))$, $(0,0,1)$.

8.4. $\phi_7(\phi_4(x_3, x_1), \varphi_3(x_2))$, $(0,1,1)$.

8.5. $\phi_{13}(\phi_1(x_1, x_2), \varphi_3(x_3))$, $(0,0,0)$.

8.6. $\phi_2(\varphi_2(x_1), \phi_6(x_2, x_3))$, $(1,0,1)$.

8.7. $\phi_8(\varphi_3(x_1), \phi_6(x_3, x_2))$, $(1,1,1)$.

8.8. $\phi_5(\phi_1(x_3, x_2), \phi_9(x_1, x_2))$, $(1,1,0)$.

8.9. $\phi_2(\phi_5(x_3, x_2), \varphi_4(x_1))$, $(0,1,1)$.

8.10. $\phi_7(\phi_{10}(x_1, x_3), \phi_3(x_2, x_1))$, $(1,0,0)$.

Завдання 9. Логічну функцію подати булевою формулою у вигляді ДДНФ і ДКНФ:

9.1. $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus 1)$.

9.2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mid \overline{(x_3 \vee x_2)}$.

9.3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2)(x_3 \oplus x_1)$.

9.4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus (x_1\bar{x}_2)$.

9.5. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \vee x_2)} \downarrow x_3$.

9.6. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus 1)(\bar{x}_2 \vee x_3)$.

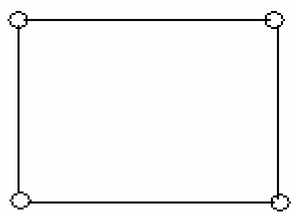
9.7. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\bar{x}_3) \mid (\bar{x}_2 x_3)$.

9.8. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2) \downarrow \overline{(x_1 \vee x_3)}$

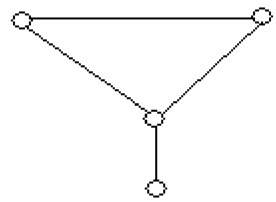
9.9. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \leftrightarrow (x_3 \downarrow \bar{x}_2)$.

9.10. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_2) \leftrightarrow \bar{x}_3$.

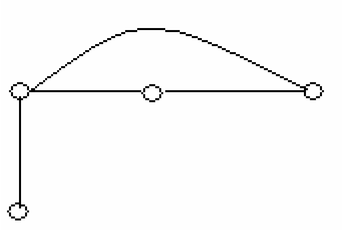
Завдання 10. Визначити доповнення $\overline{G}$ графів G, зображених на рис. 7.2. Побудувати повні графи.



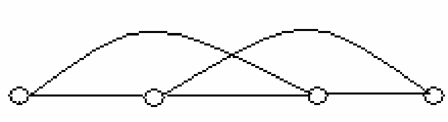
10.1



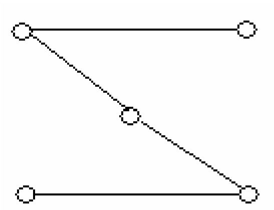
10.2



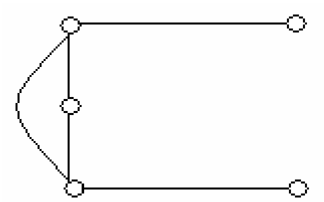
10.3



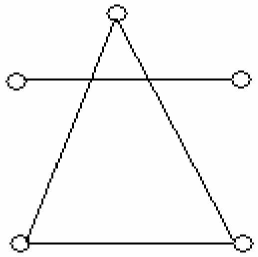
10.4



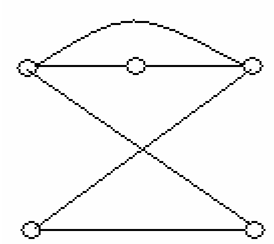
10.5



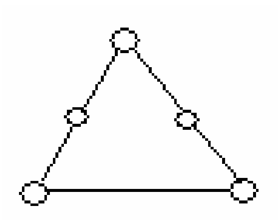
10.6



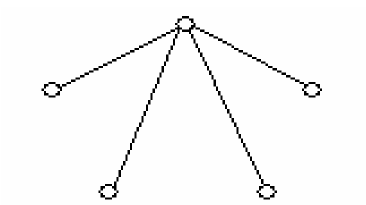
10.7



10.8



10.9



10.10

Рис. 7.2.

Завдання 11. Для неорієнтованого графа G, зображеного на рис. 7.3, виконати вказані операції видалення вершин і ребер. Побудувати отриманий граф $\widetilde{G}$. Скласти матрицю суміжності, матрицю інцидентності й список ребер. Написати маршрут, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл. Знайти:

а) число вершин і число ребер;

б) степені всіх вершин;

в) центр, периферійні вершини, радіус і діаметр;

г) точки зчленування і мости.

№ в-та	Видалити в графі G вершини $\{i\}$	Видалити в графі G ребра $\{(i;j)\}$
1	{1;3;4;9;12}	{(6;7);(7;10); (10;11);(10;13)}
2	{1;2;3;9;13}	{(4;8);(6;7);(7;8); (10;11)}
3	{3;4;5;7;9}	{(1;2);(6;10);(10;11); (11;13)}
4	{3;5;6;9;11}	{(1;4);(4;7);(4;8);(10;13)}
5	{2;5;8;10;11}	{(3;7);(4;7);(9;12);(12;13)}
6	{1;3;7;10;12}	{(2;5);(2;6);(8;9);(11;13)}
7	{3;5;6;10;11}	{(1;4);(4;7);(4;8);(12;13)}
8	{3;4;5;7;13}	{(1;2);(6;10);(10;11); (11;12)}
9	{1;3;4;8;12}	{(2;7); (5;6); (6;7); (10;13)}
10	{2;5;8;10;13}	{(3;7);(4;7);(9;12);(11;12)}

Перетворити цей неорієнтований граф в орієнтований, вказавши на кожному ребрі напрям від вершини в меншим номером до вершини з більшим номером. Побудувати одержаний орієнтований граф. Скласти його матрицю суміжності, матрицю інцидентності й список ребер. Написати шлях, орієнтований ланцюг, простий орієнтований ланцюг, контур, орієнтований цикл, простий орієнтований цикл.

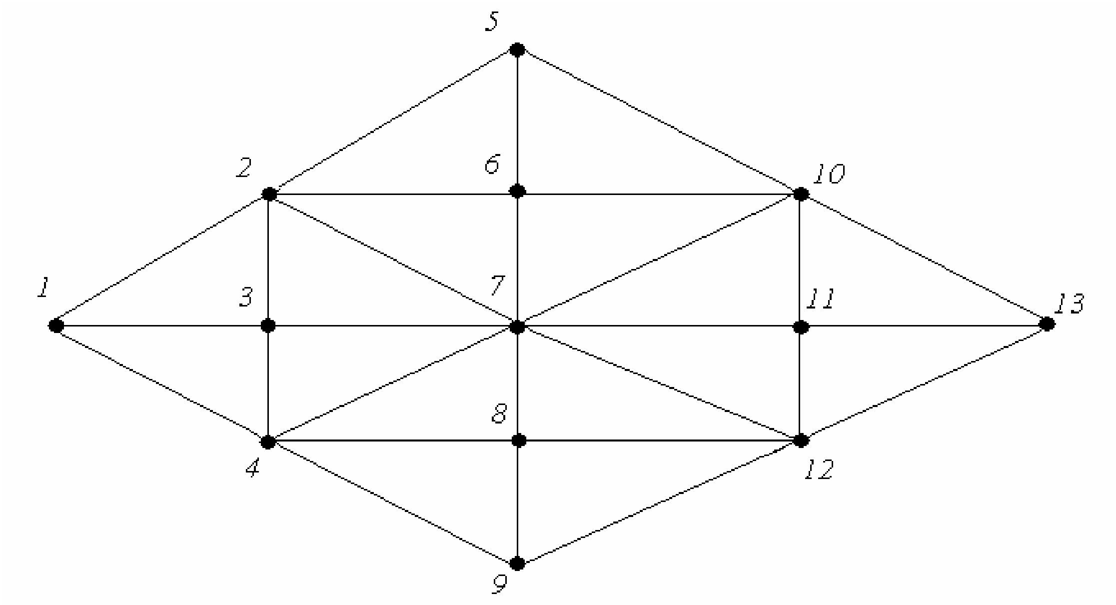


Рис.7.3.

Завдання 12. Розв'язати рівняння.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	а) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$; б) $12C_{x+7}^{x+2} = 7A_{x+3}^1 \cdot A_{x+6}^2$	6	а) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; б) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^x$
2	а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; б) $A_{x+1}^6 P_{x-5} = 72P_{x-1}$	7	а) $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 7(x-2)$; б) $A_x^4 P_{x-4} = 42P_{x-2}$
3	а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; б) $P_{x+3} = 720A_x^5 P_{x-5}$	8	а) $C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^x = 15(x-2)$; б) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$
4	а) $P_{x+2} = 210A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3$; б) $17C_{2x-1}^x = 9C_{2x}^{x-1}$	9	а) $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} = 30P_x$; б) $13C_{2x}^{x+1} = 7C_{2x+1}^{x-1}$
5	а) $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$; б) $A_x^3 + A_x^2 = \frac{9}{5}A_{x+1}^2$	10	а) $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}$; б) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1)$

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Іванович Колосов,
Людмила Борисівна Коваленко,
Степан Олександрович Станішевський,
Анатолій Вікторович Якунін,
Євгенія Серафимівна Пахомова

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник для студентів
економічних і менеджерських спеціальностей

Відповідальний за випуск: М.П. Данилевський

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 28 Н

Підп. до друку 12.06.08 Формат 60х84 1/16 Папір офісний

Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк 3,2 Обл.-вид.арк.3,7

Тираж 100 прим. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12